Bestimmungsarten der quadratisch-involutorischen Transformation.

Inaugural-Dissertation

welche mit Genehmigung

der

Philosophischen Facultät der Königl. Universität Breslau

zur

Erlangung der Doctorwürde

Montag, den 3. Juli 1882, Mittags 1 Uhr

in der

grossen Aula

öffentlich verteidigen wird

Paul Schuster

gegen die Herren Opponenten

A. Schmidt, Dr. phil.
A. Breyer, Stud. med.

Breslau.

Druck von Grass, Barth und Comp. (W. Friedrich.)

Herrn Professor Dr. Rosanes

in Hochachtung und Dankbarkeit gewidmet

vom

Verfasser.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41543119_0011

Die allgemeine Cremona'sche Transformation zweiter Ordnung[1]) ordnet bekanntlich zwei Ebenen derart einander zu, dass jedem Punkte der einen Ebene ein und nur ein Punkt der anderen Ebene entspricht; ausgenommen hiervon sind jedoch in jeder Ebene drei gewisse Punkte, die sogenannten Hauptpunkte, indem diesen ganze Graden entsprechen.

Diese Transformation geht im speciellen Falle über in die quadratisch-involutorische Verwandtschaft, und zwar tritt dieser Fall dann ein, wenn die beiden Ebenen so auf einander fallen, dass die zweimal drei Hauptpunkte sich entsprechend decken.

In der nun vorliegenden einen Ebene entspricht einem jeden Punkte stets nur ein Punkt; ausgenommen sind wiederum die drei Hauptpunkte, denen auch hier ganze Graden und zwar die gegenüberliegenden Seiten des von ihnen gebildeten Dreiecks zugehören.

In gleicher Weise einander conjugirt sind nun aber auch die Punkte einer Ebene bei Zugrundelegung eines Kegelschnittbüschels, dessen Tripeldreieck mit dem von den drei Hauptpunkten gebildeten Dreieck zusammenfällt; die Eruirung der quadratisch-involutorischen Verwandtschaft ist demnach identisch mit der Bestimmung eines Kegelschnittbüschels.

Analytisch betrachtet kommt der Uebergang von der allgemeinen quadratischen Transformation in die involutorische den Bedingungen gleich, dass in den Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \Sigma a_{i\varkappa}\, x_i\, z_\varkappa &= 0 \\ \Sigma b_{i\varkappa}\, x_i\, z_\varkappa &= 0 \end{aligned}\right\} \quad i,\ \varkappa = 1, 2, 3,$$

[1]) cfr. Magnus: Crelles Journal. Bd. 8. — Weyr: Schlömilchs Zeitschr. f. Math. u. Phys. Bd. XIV. — Reye: Schlömilch's Zeitschr. f. Math. u. Phys. Bd. XI. — Geiser: Mitteilungen der naturforschenden Gesellschaft in Bern. 1865. — Maschke: Ueber das Problem der Bestimmbarkeit der Cremona'schen Transformation 3. Ordg. In.-Diss. Breslau 1879.

welche bekanntlich die erstere repräsentiren, die Coefficienten

$$a_{ix} = a_{xi}$$

und ebenso $b_{ix} = b_{xi}$ werden; die Grössen x bedeuten in diesen Gleichungen die Coordinaten von Punkten der einen Ebene, die Grössen z die Coordinaten von Punkten der anderen Ebene.

Dies sind sechs Bedingungen und da im allgemeinen Falle die die Transformation bestimmenden Daten ein Gesammtgewicht von sieben unabhängigen oder vierzehn abhängigen Punktepaaren haben müssen,[2]) so ergiebt sich, dass die involutorische Transformation durch Daten, welche mit vier unabhängigen oder acht abhängigen Punktepaaren äquivalent sind, bestimmt ist. Letzteres liess sich aus der obigen Bemerkung, dass sich die Bestimmung der Transformation auf die Festlegung eines Kegelschnittbüschels zurückführen lasse, von vornherein absehen.

Welches Gewicht dabei den einzelnen Daten zukommt, geht aus folgenden vier Sätzen hervor:

1) Die Angabe eines Fundamentalpunktes ist einem unabhängigen oder zwei abhängigen (einfachen) Daten äquivalent.
2) Ein geometrischer Ort für einen Fundamentalpunkt zählt als ein einfaches Datum.
3) Die Angabe eines entsprechenden Punktepaares enthält zwei einfache Daten.
4) Die Angabe eines Punktes und eines geometrischen Ortes für seinen entsprechenden Punkt ist ein einfaches Datum.

Die beiden ersten Sätze hat Maschke in der bereits mehrfach erwähnten Arbeit aufgestellt, die Richtigkeit der beiden letzten hat A. Schmidt[3]) nachgewiesen.

Durch die Gleichungen, welche die allgemeine Transformation herstellen, wird einer Graden der einen Ebene ein Kegelschnitt der anderen Ebene zugeordnet; denjenigen Graden jedoch, die durch einen Hauptpunkt gehen, entsprechen in der

[2]) cfr. Maschke: In.-Diss. pag. 8. 42.

[3]) cfr. Schmidt: Zur Theorie der Cremona'schen Transformationen, insbesondere derjenigen 4. Ord. In.-Diss. Breslau 1882.

anderen Ebene selbst wieder Graden, die sich in dem entsprechenden Hauptpunkte schneiden; letztere Graden sind Teile von zerfallenden Kegelschnitten, deren anderer allen gemeinsamer Teil die dem betreffenden Hauptpunkte gegenüberliegende Hauptgrade ist. Sieht man von dieser ab, so kann man sagen, dass einem Strahlbüschel der einen Ebene, dessen Mittelpunkt einer der drei Hauptpunkte ist, wiederum ein Strahlbüschel in der anderen Ebene mit dem entsprechenden Hauptpunkte als Mittelpunkt entspricht; beide Strahlbüschel sind projectivisch, weil die Doppelverhältnisse von je vier entsprechenden Strahlen gleich sind.

Alle diese Eigenschaften bleiben natürlich bei der involutorischen Verwandtschaft bestehen; hinzutritt bekanntlich, dass die nunmehr auf einander liegenden projectivischen Strahlbüschel involutorische Lage haben. In der That halten wir nämlich einen Punkt x fest und sei der ihm entsprechende z; fasse ich nun z als Punkt x′ der ersten Ebene auf, so entspricht ihm ein Punkt z′, der mit x identisch ist. Diese Punkte mit den Hauptpunkten verbunden, liefern entsprechende Strahlen der beiden projectivischen Strahlbüschel, und da die Schenkel eines Paares entsprechend gleicher Winkel verkehrt auf einander fallen, so geschieht dies immer, d. h. die Strahlbüschel haben involutorische Lage.

Die folgenden Betrachtungen haben nun den Zweck, in gewissen Fällen die quadratische Verwandtschaft resp. ein Kegelschnittbüschel festzulegen, wenn die Hauptpunkte durch Punktepaare und diese wieder durch Punkte und Graden, auf denen die entsprechenden Punkte liegen sollen, ersetzt werden.

Uebergehend zu der Betrachtung der verschiedenen Fälle, bemerke ich noch, dass einzelne derselben, die bereits bekannt sind, hier nur der Vollständigkeit wegen aufgenommen sind.

1. Gegeben sind die drei Hauptpunkte a b c und ein Punktepaar $\begin{matrix} x' \\ \xi' \end{matrix}$.

Jeder Kegelschnitt, welcher das von den drei Hauptpunkten gebildete Dreieck zum Tripeldreieck hat, lässt sich, bezogen auf dasselbe, als Coordinatendreieck bekanntlich in der Form

$$\varkappa_1 (xbc)^2 + \varkappa_2 (xca)^2 + \varkappa_3 (xab)^2 = 0$$

darstellen, wobei auch hier die Klammer-Ausdrücke die üblichen Abkürzungen für die dreigliedrigen Determinanten bedeuten. Die durch letzte Gleichung dargestellte zweifache Unendlichkeit von Kegelschnitten wird nun weiter eingeschränkt durch die Bedingung, dass für alle in Frage kommenden Kegelschnitte $\overset{x'}{\xi'}$ ein conjugirtes Punktepaar sein soll; es ist also gleichzeitig noch folgende Gleichung

$$\varkappa_1 (x'bc)(\xi'bc) + \varkappa_2 (x'ca)(\xi'ca) + \varkappa_3 (x'ab)(\xi'ab) = 0$$

zu erfüllen. Bestimmt man aus beiden Gleichungen das Verhältniss von $\varkappa_1 : \varkappa_2 : \varkappa_3$, so ist damit die Mannigfaltigkeit der Kegelschnitte nur abhängig von einem Parameter; das dadurch definierte Kegelschnittbüschel ordnet eindeutig die Punkte der Ebene in gewünschter Weise einander zu.

Die Construction des einem gegebenen Punkte p conjugirten Punktes π geschieht nun durch Aufsuchung der Polaren von p in Bezug auf alle Kegelschnitte des Büschels; alle diese Polaren schneiden sich in dem gewünschten Punkte π. Nicht minder einfach lässt sich π vermittelst der in der Einleitung gedachten Involutionen finden. Da nämlich zwei Seiten des Tripeldreiecks conjugirte Strahlen in derjenigen Involution sind, deren Mittelpunkt ihr Schnittpunkt ist, da ferner ein zweites Paar conjugirter Strahlen im Strahlsystem die Verbindungslinien des Mittelpunktes nach dem gegebenen Punktepaare $\overset{x'}{\xi'}$ hin sind, jede Involution aber durch zwei Paare von Strahlen bekannt ist, so lassen sich zunächst leicht die Asymptoten finden. Liegen letztere vor, so hat man nur in jeder Involution den vierten harmonischen Strahl zu den Asymptoten und der Verbindungslinie des Mittelpunktes mit p, der letzteren zugeordnet, zu construiren; diese drei Strahlen schneiden sich im Punkte π.

2. Gegeben sind die drei Hauptpunkte a b c, ferner zwei Punkte a′ a″ und zwei Graden A′ A″, auf welchen die zu a′ a″ conjugirten Punkte α' α'' liegen sollen.

Die Gleichung

$$\varkappa_1 (xbc)^2 + \varkappa_2 (xca)^2 + \varkappa_3 (xab)^2 = 0$$

stellt, wie wir wissen, die zweifache Unendlichkeit aller Kegelschnitte dar, für welche Dreieck a b c Coordinaten- und Tripel-

dreieck ist. Unter allen diesen Kegelschnitten giebt es einen (K_1), für den a′ der Pol der Graden A′ ist; ich finde diesen wie folgt:

Die Polare von a′ in Bezug auf

$$\varkappa_1 (xbc)^2 + \varkappa_2 (xca)^2 + \varkappa_3 (xab)^2 = 0$$

ist

$$\varkappa_1 (xbc)(a'bc) + \varkappa^2 (xca)(a'ca) + \varkappa_3 (xab)(a'ab) = 0;$$

diese soll identisch mit

$$A_1' x_1 + A_2' x_2 + A_3' x_3 = 0$$

sein, d. h. es bestehen die Gleichungen

$$\varkappa_1 (bc)_i (a'bc) + \varkappa_2 (ca)_i (a'ca) + \varkappa_3 (ab)_i (a'ab) - \rho A_i' = 0$$

worin die $(bc)_i$ . . . die zweigliedrigen Unterdeterminanten aus den Coefficienten der Grössen a b c bedeuten, in denen jedesmal der äussere Index fehlt. Aus den drei Gleichungen, welche man erhält, wenn man dem i der Reihe nach die Werte 1, 2, 3 zuertheilt, verbunden mit der Gleichung

$$\varkappa_1 (xbc)^2 + \varkappa_2 (xca)^2 + \varkappa_3 (xab)^2 = 0$$

lassen sich die Grössen $\varkappa_1\ \varkappa_2\ \varkappa_3\ \rho$ eliminiren; das Resultat der Elimination ist:

$$\begin{vmatrix} (xbc)^2 & (xca)^2 & (xab)^2 & 0 \\ (bc)_1\ (a'bc), & (ca)_1\ (a'ca), & (ab)_1\ (a'ab), & A_1' \\ (bc)_2\ (a'bc), & (ca)_2\ (a'ca), & (ab)_2\ (a'ab), & A_2' \\ (bc)_3\ (a'bc), & (ca)_3\ (a'ca), & (ab)_3\ (a'ab), & A_3' \end{vmatrix} = 0.$$

Um dasselbe zu vereinfachen, betrachten wir den Factor von $(xbc)^2$ zunächst; derselbe ist

$$\begin{vmatrix} (ca)_1\ (a'ca), & (ab)_1\ (a'ab), & A_1' \\ (ca)_2\ (a'ca), & (ab)_2\ (a'ab), & A_2' \\ (ca)_3\ (a'ca), & (ab)_3\ (a'ab), & A_3' \end{vmatrix} = (a'ca)\ (a'ab) \begin{vmatrix} (ca)_1 & (ab)_1 & A_1' \\ (ca)_2 & (ab)_2 & A_2' \\ (ca)_3 & (ab)_3 & A_3' \end{vmatrix}.$$

Nach einiger Umformung geht die letzte Determinante über in $(abc) \{ A_1'a_1 + A_2'a_2 + A_3'a_3 \}$ so dass, wenn der letzte Klammerausdruck mit A_a' bezeichnet wird,

$$(a'ab)\ (a'ca)\ (abc)\ A_a'$$

der Factor von $(xbc)^2$ ist. Eine ähnliche Vereinfachung erfahren die Factoren von $(xca)^2$ und $(xab)^2$; allen drei Ausdrücken ist der Faktor (a b c) gemeinsam. Mit Weglassung dieses Terms — denn es ist $(abc) \gtrless 0$, weil die drei Haupt-

punkte nicht auf einer Graden liegen dürfen — lautet nun endgültig die Gleichung des Kegelschnitts K_1:

$$(xbc)^2\,(a'ca)\,(a'ab)\,A_a' + (xca)^2\,(a'ab)\,(a'bc)\,A_b' + (xab)^2\,(a'bc)\,(a'ca)\,A_c' = 0.$$

Analog lässt sich aus obiger Mannigfaltigkeit ein zweiter Kegelschnitt K_2 bestimmen, in Bezug auf welchen die Polare von a″ A″ ist; seine Gleichung wird sein:

$$(xbc)^2\,(a''ca)\,(a''ab)\,A_a'' + (xca)^2\,(a''ab)\,(a''bc)\,A''_b + (xab)^2\,(a''bc)\,(a''ca)\,A_c'' = 0.$$

Das Kegelschnittbüschel, welches durch K_1 und K_2 definirt ist, setzt die Punkte der Ebene in die gewünschte Beziehung zu einander; die Transformation ist also durch diese Daten eindeutig festgelegt.

Um schliesslich den zu a′ conjugirten Punkt α′ zu finden, hat man nur die Polare von a′ in Bezug auf K_2 zu suchen; diese schneidet A′ in dem verlangten Punkte α′. Eine analoge Construction lässt den zu a″ conjugirten Punkt α″ finden.

3. Gegeben ist eine Grade L, auf welcher der Hauptpunkt a liegen soll; ferner die beiden Hauptpunkte bc, ein Punktepaar $\frac{x'}{\xi'}$, endlich eine Grade A′ als Ort für den zu a′ conjugirten Punkt α′.

Der gesuchte Punkt a muss die Eigenschaft haben, Eckpunkt eines Tripeldreieks zu sein, dessen andere Ecken b und c sind. Angenommen, ein beliebiger Punkt a in der Ebene erfülle diese Bedingung, dann weiss man, dass alle Kegelschnitte, welche abc zum Tripel und $\frac{x'}{\xi'}$ zu conjugirten Punkten haben, ein Büschel bilden. Die Gleichung dieses Büschels erhält man, wenn man aus den im Fall 1 aufgestellten beiden Gleichungen eines der $\varkappa$ z. B. $\varkappa_3$ eliminirt, dieselbe lautet demnach:

$$\varkappa_1 \{ (xbc)^2\,(x'ab)\,(\xi'ab) - (xab)^2\,(x'bc)\,(\xi'bc) \} + \varkappa_2 \{ (xca)^2\,(x'ab)\,(\xi'ab) - (xab)^2\,(x'ca)\,(\xi'ca) \} = 0.$$

Wird hierin einmal $\varkappa_2 = 0$, dann $\varkappa_1 = 0$ gesetzt, so erhält man zwei Kegelschnitte $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$, die sich als die das Büschel bestimmenden auffassen lassen.

In dem von uns gesuchten Büschel muss ein Kegelschnitt enthalten sein, bezüglich dessen a′ und A′ Pol und Polare sind; ein solcher wird in dem bis jetzt gefundenen Büschel $(\mathfrak{K}_1\ \mathfrak{K}_2)$ im Allgemeinen nicht vorhanden sein; erst dann tritt dieser Fall ein, wenn erwähnter Kegelschnitt K_1, dessen Gleichung im vorigen Falle aufgestellt ist, sich linear aus $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ zusammensetzen lässt, d. h. wenn die Relation

$$\begin{vmatrix} (a'ab)\ (a'ca)\ A_{a'}, & (a'ab)\ (a'bc)\ A_{b'}, & (a'ca\ (a'bc)\ A_{c'} \\ (x'ab)\ (\xi'ab) & 0 & -\ (x'bc)\ (\xi'bc) \\ 0 & (x'ab)\ (\xi'ab) & -\ (x'ca)\ (\xi'ca) \end{vmatrix} = 0$$

erfüllt ist.

Diese Determinante lässt sich leicht in folgenden Ausdruck umformen:

$$D\ .\ (x'ab)\ (\xi'ab) = 0$$

wobei

$$D = \begin{vmatrix} (a'ca)(a'ab)\ A_{a'}, & (a'ab)(a'bc)\ A_{b'}, & (a'ca)(a'bc)\ A_{c'}\ (x'ab)(\xi'ab) \\ 1 & 0 & -\ (x'bc)\ (\xi'bc) \\ 0 & 1 & -\ (x'ca)\ (\xi'ca) \end{vmatrix} \text{ ist.}$$

Von den Factoren $(x'ab)\ (\xi'ab)$ kann man im Folgenden absehen, da beide ungleich Null sind; wäre z. B. $(x'ab) = 0$, so hiesse dies, a befinde sich auf der Graden $|x'b|$, oder $|x'b|$ wäre eine Hauptgrade; der zu x′ conjugirte Punkt müsste also c sein, ein Fall, der durch die angegebenen Daten ausgeschlossen ist; ebensowenig kann $(\xi'ab) = 0$ sein.

$D = 0$ ist demnach die übrigbleibende Bedingung, welcher der beliebig angenommene Punkt a zu genügen hat, damit das Kegelschnittbüschel $(\mathfrak{K}_1\ \mathfrak{K}_2)$ das verlangte sei. In dieser variablen Grösse a ist D vom dritten Grade, d. h. a beschreibt eine Curve dritter Ordnung. Letztere hat in b und c je einen Doppelpunkt, wie man leicht erkennt, wenn man bildet

$$\frac{dD}{da_1},\quad \frac{dD}{da_2},\quad \frac{dD}{da_3}$$

und in diesen Ausdrücken das eine Mal b, das andere Mal c für a setzt; dieselben werden dann identisch Null.

Nun darf bekanntlich eine nicht zerfallende Curve dritter Ordnung nur einen Doppelpunkt haben; der Umstand, dass $D = 0$ zwei Doppelpunkte hat, macht demnach diese Curve

zu einer zerfallenden. Man erkennt auch bald, dass einer der Factoren, in welche D sich zerlegen lässt, (abc) ist; denn ist (abc) = 0, so wird

$$(a'ca) = \varkappa\ (a'cb) \qquad (x'ca) = \varkappa\ (x'cb)$$
$$(a'ab) = \lambda\ (a'cb) \qquad (x'ab) = \lambda\ (x'cb);$$

diese Werte in D eingesetzt, machen D = 0.

Sei D_1 der nach Absonderung von (abc) zurückbleibende Theil von D, also $D = (abc)\ D_1$.

Da $(abc) \gtrless 0$ aus bereits früher erwähntem Grunde ist, so bleibt für unsere Betrachtung nur die eine zu erfüllende Bedingung

$$D_1 = 0$$

übrig. Diese Curve geht durch b und c und ist quadratisch in a; sie schneidet somit L in zwei Punkten a_1 a_2, die in Verbindung mit b und c zwei solche Tripel ergeben, dass die Büschel von Kegelschnitten, welche je eines der Tripel als gemeinschaftliches haben, allen gestellten Anforderungen genügen.

Die Transformation ist folglich zweideutig bestimmt. Würde man die Gleichung desjenigen Kegelschnittes aufgestellt haben, in Bezug auf den abc ein Tripeldreieck und a' der Pol zu der Graden A' ist, so ist die Bedingung, dass für diesen Kegelschnitt $\overset{x'}{\xi'}$ ein conjugirtes Punktepaar sei, identisch mit D = 0.

Wird im speciellen Falle aus L die Hauptgrade B, so trifft, da B durch c geht, die Curve zweiter Ordnung $D_1 = 0$ die Grade B ausser in c nur noch einmal; erstere Möglichkeit ist auszuschliessen, da dann die Transformation überbestimmt wäre, mithin bleibt in diesem speciellen Falle nur noch eine Eindeutigkeit übrig.

Dasselbe Resultat tritt natürlich ein, wenn L in A übergeht.

4. Gegeben sind die beiden Hauptpunkte bc, eine Grade L als Ort für den dritten Hauptpunkt a, endlich drei Graden A' A'' A''', auf welchen die zu a' a'' a''' conjugirten Punkte α' α'' α''' liegen sollen.

Sei a zunächst ein beliebiger Punkt der Ebene; man bestimmt nun drei Kegelschnitte K_1 K_2 K_3, in Bezug auf welche

abc Tripeldreieck und respective $\begin{matrix} a' & a'' & a''' \\ A' & A'' & A''' \end{matrix}$ Pol und Polare sind; die Gleichungen derselben sind:

$$(xbc)^2\,(a^i ca)\,(a^i ab)\,A_a^i + (xca)^2\,(a^i ab)\,(a^i bc)\,A_b^i + (xab)^2\,(a^i bc)\,(a^i ca)\,A_c^i = 0 \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Diese Kegelschnitte müssen nun, soll die Transformation überhaupt bestimmt sein, einem Büschel angehören; die Bedingung dafür ist:

$$\Delta = \begin{vmatrix} (a'ca)\,(a'ab)\,A_a', & (a'ab)\,(a'bc)\,A_b', & (a'bc)\,(a'ca)\,A_c' \\ (a''ca)\,(a''ab)\,A_a'', & (a''ab)\,(a''bc)\,A_b'', & (a''bc)\,(a''ca)\,A_c'' \\ (a'''ca)\,(a'''ab)\,A_a''', & (a'''ab)\,(a'''bc)\,A_b''', & (a'''bc)\,(a'''ca)\,A_c''' \end{vmatrix} = 0.$$

Auch in dieser Determinante sondert sich der Factor (abc) ab, da für (abc) = 0 auch $\Delta = 0$ wird.

Ist nämlich (abc) = 0, so ist

$$(bc)_i = \rho\,(ab)_i \text{ und } (ca)_i = \sigma\,(ab)_i;$$

damit verwandelt sich Δ in:

$$\begin{vmatrix} \sigma\,(a'ab)^2\,A_a', & \rho\,(a'ab)^2\,A_b', & \rho\sigma\,(a'ab)^2\,A_c' \\ \sigma\,(a''ab)^2\,A_a'', & \rho\,(a''ab)^2\,A_b'', & \rho\sigma\,(a''ab)^2\,A_c'' \\ \sigma\,(a'''ab)^2\,A_a''', & \rho\,(a'''ab)^2\,A_b''', & \rho\sigma\,(a'''ab)^2\,A_c''' \end{vmatrix};$$

letzterer Ausdruck ist nun gleich

$$\rho^2\sigma^2\,(a'ab)^2\,(a''ab)^2\,(a'''ab)^2\,(A'\,A''\,A''')\,(abc),$$

d. h. für (abc) = 0 selbst gleich Null.

Der Factor (abc) ist nun stets von Null verschieden, weil die drei Hauptpunkte nie auf einer Graden liegen dürfen; für den vorliegenden und wie ich an dieser Stelle bemerken will, für alle Fälle, in denen (abc) als Factor heraustritt, ist nur der zweite zurückbleibende Factor D_{11}, wo also $\Delta = (abc)\,D_{11}$ ist, in Betracht zu ziehen. Letzterer ist, da Δ in a vom fünften Grade erscheint, demnach in a nur noch vom vierten; a beschreibt also eine Curve vierter Ordnung, welche L in vier für die Lösung brauchbaren Punkten schneidet.

Die Transformation ist somit vierdeutig bestimmt.

Dass die Curve $\Delta = 0$ durch b und c geht, erkennt man sofort, wenn man entweder a für b oder a für c setzt; für die fernere Betrachtung ist es aber nicht nur von Interesse, sondern auch nothwendig zu wissen, wie vielfache Punkte b und c sind.

Differenzire ich Δ nach a_i, oder was dasselbe ist, polarisire ich Δ in Bezug auf a durch eine Grösse μ und setze dann $a = b$, so verschwinden alle Determinanten — weil eine Reihe Null wird — bis auf eine; in dieser einen jedoch werden zwei (Vertical) Reihen proportional, sie ist also auch gleich Null, folglich sind b und da ein Gleiches für c stattfindet, auch c für $\Delta = 0$ Doppelpunkte.

Polarisirt man nun die bereits einmal polarisirten Determinanten, bevor a durch b oder c ersetzt ist, noch einmal und setzt dann wieder $a = b$ (oder $a = c$), so gilt genau dasselbe wie oben; sämmtliche Determinanten enthalten eine Reihe von Nullen und in der einen, in welcher dies nicht stattfindet, sind zwei Reihen proportional. Da folglich alle Terme verschwinden, so heisst dies, b und c sind dreifache Punkte der Curve fünfter Ordnung.

Nun geht die Grade $(abc) = 0$ sowohl durch b als durch c, folglich sind b und c für die Curve $D_{11} = 0$ noch je Doppelpunkte.

Geht nun im speciellen Falle L durch b (oder c), so wird die Grade ausser in b nur noch zweimal von der Curve, die a beschreibt, geschnitten; da ersterer Fall auch hier aus oben erwähntem Grunde auszuschliessen ist, so ist durch diese Daten eine Zweideutigkeit der Transformation festgelegt.

5. Gegeben sind die beiden Hauptpunkte b c, und zwei Punktepaare $\begin{matrix} x' & x'' \\ \xi' & \xi'' \end{matrix}$.

Unter vorläufig beliebiger Annahme eines Punktes a in der Ebene ist

$$\varkappa_1 (xbc)^2 + \varkappa_2 (xca)^2 + \varkappa_3 (xab)^2 = 0$$

die Gleichung eines Kegelschnitts, welcher abc zum Tripeldreieck hat. Ferner sollen $\begin{matrix} x' & x'' \\ \xi' & \xi'' \end{matrix}$ conjugirte Punktepaare aller in obiger Gleichung dargestellten Kegelschnitte sein; die dies besagenden Bedingungen sind:

$$\varkappa_1 (x'bc)(\xi'bc) + \varkappa_2 (x'ca)(\xi'ca) + \varkappa_3 (x'ab)(\xi'ab) = 0,$$
$$\varkappa_1 (x''bc)(\xi''bc) + \varkappa_2 (x''ca)(\xi''ca) + \varkappa_3 (x''ab)(\xi''ab) = 0.$$

Durch diese beiden hinzutretenden Bedingungen ist ein Kegelschnitt genau fixirt; seine Gleichung ist:

$$\begin{vmatrix} (xbc)^2 & (xca)^2 & (xab)^2 \\ (x'bc)\ (\xi'bc), & (x'ca)\ (\xi'ca), & (x'ab)\ (\xi'ab) \\ (x''bc)\ (\xi''bc), & (x''ca)\ (\xi''ca), & (x''ab)\ (\xi''ab) \end{vmatrix} = 0.$$

Die Bestimmung der Transformation kommt nun aber nicht auf die Bestimmung eines Kegelschnitts, sondern auf die Festlegung eines Kegelschnittbüschels hinaus. Soll dasselbe durch die in diesem Falle gegebenen Daten bestimmbar sein, so muss obiger Kegelschnitt unbestimmt sein; dies tritt ein, wenn die beiden letzten Horizontalreihen einander proportional werden. Da zur Erfüllung dieser Bedingung über eine Unbekannte a noch frei verfügt werden kann, so folgt, dass die Transformation durch die gegebenen Bestimmungsstücke wohl bestimmt werden kann; es fragt sich nur noch, wie vieldeutig wird dieselbe?

Werden die genannten Reihen proportional, so sind die aus ihnen gebildeten drei Determinanten $P_1\ P_2\ P_3$ identisch Null und umgekehrt, sind letztere Null, so wird die zweite Horizontalreihe proportional der dritten. Es muss demnach sein:

$$P_1 = (x'ca)\,(\xi'ca)\,(x''ab)\,(\xi''ab) - (x'ab)\,(\xi'ab)\,(x''ca)\,(\xi''ca) = 0$$
$$P_2 = (x'ab)\,(\xi'ab)\,(x''bc)\,(\xi''bc) - (x'bc)\,(\xi'bc)\,(x''ab)\,(\xi''ab) = 0$$
$$P_3 = (x'bc)\,(\xi'bc)\,(x''ca)\,(\xi''ca) - (x'ca)\,(\xi'ca)\,(x''bc)\,(\xi''bc) = 0.$$

Mit Anwendung der bekannten Identität

$$(pqr)\,(pst) + (pqs)\,(ptr) + (pqt)\,(prs) \equiv 0$$

gehen vorige drei Ausdrücke über in

$$P_1 = \{(x''ax')\,(\xi'ca)\,(\xi''ab) + (\xi''a\xi')\,(x'ab)\,(x''ca)\}\,(abc) = 0$$
$$P_2 = \{(x''bx')\,(\xi'ab)\,(\xi''bc) + (\xi''b\xi')\,(x'bc)\,(x''ab)\}\,(abc) = 0$$
$$P_3 = \{(x''cx')\,(\xi'bc)\,(\xi''ca) + (\xi''c\xi')\,(x'ca)\,(x''bc)\}\,(abc) = 0.$$

Zur Verificirung der Richtigkeit dieser Umformungen genügt es, eine derselben nachzuweisen.

Setzt man zunächst in der Identität

$$p = c,\ q = x'',\ r = a,\ s = x',\ t = b$$

so erhält man nach geringer Umstellung

$$(x''ca)\,(x'bc) = (abc)\,(x''cx') + (x''bc)\,(x'ca);$$

damit geht nun P_3 über in:

$$(abc)\,(x''cx')\,(\xi'bc)\,(\xi''ca) + (x'ca)\,(x''bc)\,\{(\xi'bc)\,(\xi''ca) - (\xi'ca)\,(\xi''bc)\}.$$

Wendet man auf den letzten Klammerausdruck dieselbe Identität nochmals an, nur mit dem Unterschiede, dass an Stelle von $x''\ \xi''$ und an Stelle von $x'\ \xi'$ gesetzt wird, so ergiebt sich obige Darstellung.

Von dem Factor (abc) ist in allen drei Grössen P_i wiederum abzusehen.

Die Grössen P_i sind durch zwei Identitäten mit einander verbunden; dieselben werden erhalten, wenn man das Rechteck, dessen Determinanten eben die P_i sind, das eine Mal durch die erste, das andere Mal durch die zweite Horizontalreihe zu Determinanten vervollständigt, welche in Folge dessen identisch Null sind; aufgelöst nach den jedesmaligen dritten Reihen folgen daraus die erwähnten Identitäten:

$$(x'bc)\ (\xi'bc)\ P_1 + (x'ca)\ (\xi'ca)\ P_2 + (x'ab)\ (\xi'ab)\ P_3 \equiv 0$$
$$(x''bc)\ (\xi''bc)\ P_1 + (x''ca)\ (\xi''ca)\ P_2 + (x''ab)\ (\xi''ab)\ P_3 \equiv 0.$$

P_2 und P_3 sind in a je linear, sie stellen also je eine Grade dar; für ihren Schnittpunkt ist gleichzeitig $P_2 = 0\ P_3 = 0$.

Auf Grund der Identitäten, muss nun entweder

$$P_1 = 0$$

oder

$$(x'bc)\ (\xi'bc) = 0 \text{ und } (x''bc)\ (\xi''bc) = 0$$

für denselben Punkt sein; da aber in den beiden letzten Gleichungen a gar nicht auftritt, so kann nur der erste Fall eintreten, d. h. der Schnittpunkt $(P_2\ P_3)$ liegt auch auf P_1.

Dieser eine Punkt besitzt also die Eigenschaft, den erst erwähnten Kegelschnitt unbestimmt zu machen, folglich die Transformation, wie oben erwähnt, festzustellen; dieselbe ist somit eindeutig bestimmt.

Die Construction des einem beliebigen Punkte a' entsprechenden Punktes α' ergiebt sich eben so leicht und auf dieselbe Weise, wie im Fall 1, da die beiden Involutionen, die in b und c ihre Mittelpunkte haben, durch die beiden nach $\begin{matrix} x' & x'' \\ \xi' & \xi'' \end{matrix}$ gehenden Strahlenpaare eindeutig bestimmt sind.

Sucht man in der Involution b denjenigen Strahl, welcher der Graden $|bc|$, und im Strahlsystem c denjenigen Strahl, welcher der Graden $|cb|$ entspricht, so schneiden sich diese beiden Strahlen in dem dritten Hauptpunkte a.

6. Gegeben sind zwei Hauptpunkte b c, ein Punktepaar $\overset{x'}{\xi'}$ und zwei Graden A′ A″ als Oerter für die zu a′ a″ conjugirten Punkte α' α''.

Auch hier wird zur Lösung der Aufgabe ein Punkt a in der Ebene vorerst beliebig angenommen.

Die Bedingung dafür, dass ein Kegelschnitt, welcher abc zum Tripeldreieck und $\overset{a'}{A'}$ zu Pol und Polare hat, wodurch er eindeutig bestimmt ist, auch noch in $\overset{x'}{\xi'}$ ein conjugirtes Punktepaar besitzt, ist in der Behandlung des Falles 3, ausführlich abgeleitet; sie lautet

$$D = 0$$

oder nach Absonderung des für die Lösung unbrauchbaren Factors (abc)

$$D_1 = 0.$$

Setze ich hierin $\overset{a''}{A''}$ an Stelle von $\overset{a'}{A'}$, so erhalte ich eine zweite Bedingung

$$D_1' = 0,$$

welche aussagt, dass für einen Kegelschnitt K_2 . . abc Tripeldreieck, $\overset{a''}{A''}$ Pol und Polare und $\overset{x'}{\xi'}$ conjugirte Punkte sind.

Sind diese beiden Bedingungen erfüllt, so definiren die beiden Kegelschnitte K_1 und K_2 ein Büschel $(K_1 K_2)$, für welches abc das einzige Tripeldreieck, $\overset{x'}{\xi'}$ ein conjugirtes Punktepaar ist und in welchem es zwei Kegelschnitte giebt, die bezüglich $\overset{a'}{A'}$ und $\overset{a''}{A''}$ zu Pol und Polare haben, ein Büschel also, in Bezug auf welches die Punkte der Ebene in gewünschter Weise einander entsprechen.

$D_1 = 0$ sowie $D_1' = 0$ sind in a quadratisch, stellen also zwei Kegelschnitte dar, die durch b und c gehen; von D_1 ist dies oben nachgewiesen worden; von D_1' gilt dasselbe, da sich D_1' von D_1 ja nur um Constanten, welche bei dem Nachweis nicht in Betracht kommen, unterscheidet.

Ausser b und c, die auch hier aus bereits erwähntem Grunde fortzulassen sind, haben diese beiden Kegelschnitte

demnach noch zwei Punkte gemeinsam, die je in Verbindung mit b und c Tripel der verlangten Art liefern; die Transformation ist also zweideutig bestimmt.

7. Gegeben sind die beiden Hauptpunkte b c, sowie vier Punkte $a' a'' a''' a^{IV}$ und vier Graden $A' A''' A''' A^{IV}$, auf welchen die jenen Punkten conjugirten Punkte $\alpha' \alpha'' \alpha''' \alpha^{IV}$ liegen sollen.

Auf A' und A'' nehme ich je einen Punkt α' resp. α'' an und betrachte dieselben als zu a' und a'' conjugirte. Durch die beiden Strahlenpaare sowohl von b, als von c sind die Involutionen, die in b und c ihre Mittelpunkte haben, bestimmt; dieselben liefern nun zu a''' und a^{IV} je zwei — für jede Involution einen — auf A''' und A^{IV} liegende Punkte; seien $\bar{\alpha}'''$ und $\bar{\alpha}^{IV}$ die vermittelst des Strahlsystems c, $\bar{\bar{\alpha}}'''$ und α^{IV} die mit Hilfe des Strahlsystems b auf A''' und A^{IV} gefundenen Punkte. α' und α'' verbinde man nun durch die Grade G_{12}, ebenso $\bar{a}'''$ $\bar{a}^{IV}$ durch eine Grade G_{34} und endlich $\bar{\bar{\alpha}}'''$ $\bar{\alpha}^{IV}$ durch die Grade $G_{\bar{3}\bar{4}}$; dann und nur dann ist die Aufgabe als gelöst zu betrachten, wenn die Punkte α' und α'' so gewählt sind, dass die Graden $G_{\bar{3}\bar{4}}$ und $G_{\bar{\bar{3}}\bar{\bar{4}}}$ zusammenfallen.

Es fragt sich nun, tritt dieser Fall überhaupt ein und wenn die Frage zu bejahen ist, wie oft tritt er ein? Hält man zuvörderst α' auf A' fest, variirt aber α'' auf A'', so dass α'' die ganze Punktreihe A'' beschreibt, so durchlauft G_{12} ein Strahlbüschel, dessen Mittelpunkt α' ist, und welches mit der Punktreihe A'' perspectivisch liegt; jedem neuen Punkte α'' entspricht eine andere Involution c und damit sowohl dem Punkte a''' als a^{IV} je ein anderer Punkt α''' auf A''' resp. α^{IV} auf A^{IV}. Die Punktreihen A''' A^{IV} sind demnach projectivisch mit der Punktreihe A'', — denn die Beziehung ist eine algebraische und eindeutige — folglich sind sie auch unter einander projectivisch, also umhüllen sämmtliche Graden G_{34}, welche jedesmal die dem Punkte α'' entsprechenden Punkte α''' α^{IV} verbinden, einen Kegelschnitt. Ein Gleiches gilt auch von denjenigen Graden, welche den Strahlen eines Büschels, dessen Mittelpunkt beliebig in der Ebene gelegen ist, entsprechen, denn die Punktreihen A''' A^{IV} sind stets mit dem jedesmaligen Strahlbüschel projectivisch. Läuft nun α' auf der Graden A' hin, so erhalte ich eine Unend-

lichkeit von Kegelschnitten, welche sämmtlich drei feste Tangenten berühren.

Zunächst nämlich ist klar, dass zwei derselben die Graden A''' A^{IV} selbst sind; sie sind ja stets die Träger der in Betracht kommenden projectivischen Punktreihen. Die dritte, allen Kegelschnitten gemeinsame Tangente ist die Grade $|c, (A' A'')|$ d. h. die Verbindungslinie von c mit dem Schnittpunkte der Graden A' und A''; in jedem Strahlbüschel der Ebene nämlich geht ein Strahl nach $(A' A'')$; derselbe, als G_{12} aufgefasst, verbindet die Punkte α' und α'' mit einander. Nun liegen diese Punkte in diesem Falle auf einander, folglich ist, da sowohl $|ca'|$, als $|ca''|$ zu entsprechenden Graden denselben Strahl $|c, (A' A'')|$ haben, das Strahlsystem c ein parabolisches. Allen Graden $|ca^i|$, also natürlich auch den beiden Graden $|ca'''|$ und $|ca^{IV}|$ entspricht diese einzige besondere Grade; dieselbe schneidet A''' in einem Punkte $\overline{\alpha}'''$ und A^{IV} in α^{IV}, ist also stets eine $G_{\overline{34}}$, d. h. eine Tangente.

Aus dem Gesagten folgt, dass zwischen den Graden G_{12} und $G_{\overline{34}}$ eine quadratische – der Punkt-Transformation dual gegenüberstehende — Graden-Transformation stattfindet.

Genau auf gleiche Weise lässt sich zeigen, dass zwischen den Graden G_{12} und $G_{\overline{34}}$ ebenfalls eine quadratische Transformation besteht; die drei Haupttangenten, welche hier von allen Kegelschnitten berührt werden, sind A''', A^{IV}, $|b, (A' A'')|$.

Zwischen den Graden G_{34} und $G_{\overline{34}}$ würde nun im Allgemeinen eine Transformation vierter Ordnung statthaben; diese reducirt sich jedoch, da die beiden zu Grunde liegenden Transformationen zwei Hauptgraden gemeinsam haben, auf den zweiten Grad. In letzterer giebt es nun vier zusammenfallende Elemente; dieselben genügen, wie bereits am Eingange erwähnt wurde, allen Bedingungen, folglich ist die Transformation vierdeutig bestimmt.

8. Gegeben sind zwei Punktepaare $\begin{matrix} x' & x'' \\ \xi' & \xi'' \end{matrix}$, ein Hauptpunkt c und zwei Graden L, M als Oerter für die beiden anderen Hauptpunkte a resp. b.

Durch beliebige Annahme der Punkte a und b in der Ebene lässt sich ein Kegelschnitt finden, der abc zum Tripeldreieck

und $\begin{matrix} x' & x'' \\ \xi' & \xi'' \end{matrix}$ zu conjugirten Punktepaaren hat; die Gleichung desselben ist im Fall 5 abgeleitet worden und lautet:

$$\begin{vmatrix} (xbc)^2 & (xca)^2 & (xab)^2 \\ (x'bc)\ (\xi'bc), & (x'ca)\ (\xi'ca), & (x'ab)\ (\xi'ab) \\ (x''bc)\ (\xi''bc), & (x''ca)\ (\xi''ca), & (x''ab)\ (\xi''ab) \end{vmatrix} = 0.$$

Die Punkte a und b müssen nun aber in der Ebene auf den Graden L M so gewählt werden, dass nicht ein Kegelschnitt, sondern ein ganzes Büschel von Kegelschnitten durch sie und die übrigen Bestimmungsstücke definirt ist; dies wird eintreten, wenn die Grössen a und b von der Beschaffenheit sind, dass sie die beiden letzten Horizontalreihen obiger Determinante einander proportional machen.

Die drei Gleichungen

$$P_1 = 0 \quad P_2 = 0 \quad P_3 = 0$$

repräsentiren auch hier, gleichwie oben, die für erwähnte Proportionalität nothwendigen Bedingungen; dieselben sind jedoch hier nicht allein in a, sondern in a und b variabel. Trotzdem lassen sie sich, wenn je eine der Coordinaten z. B. a_3 und b_3 vermittelst der Gleichungen

$$\Sigma L_i a_i = 0 \qquad \Sigma M_i b_i = 0, \qquad i = 1, 2, 3.$$

welche bestehen, weil a auf L und b auf M liegen soll, durch die jedesmaligen anderen beiden Coordinaten ersetzt wird und die Gleichungen dann durch a_2 b_2 dividirt werden, als Curven auffassen in den variablen Coordinaten $\frac{a_1}{a_2}$, $\frac{b_1}{b_2}$.

Die drei Grössen P_i hängen auch hier wieder durch dieselben Identitäten von einander ab, da ja letztere vollständig unabhängig davon sind, welche Grösse in ihnen variabel ist. Nun ist

P_1 in a vom dritten, in b vom ersten Grade,
P_2 in a vom ersten, in b vom dritten und
P_3 in a vom ersten, in b vom ersten Grade.

Die Elimination von b aus P_2 und P_3 ergiebt eine Gleichung vierten Grades in a; es giebt also vier Wertepaare ab, die P_2 und P_3 gleichzeitig annulliren; dieselben machen aber auch P_1 zu Null, denn keiner der Factoren von P_1 in den beiden Identitäten enthält a; da sie ferner von einander verschieden sind,

so kann höchstens der eine von ihnen durch einen Punkt b Null werden, niemals aber können beide zugleich verschwinden.

Die einzige Möglichkeit für letzteren Fall wäre allerdings, wenn b = c würde; diese ist aber durch die Angabe der Daten von vornherein ausgeschlossen, da die Grade M, auf der b sich bewegt, nicht durch c geht.

Ein zweiter Weg lässt ebenso leicht erkennen, dass die vier Lösungen von P_2 und P_3 sämmtlich Lösungen für P_1 sind. P_3 ist linear und, wenn man es noch vor der oben angegebenen Reduction betrachtet, homogen in a und b. Wäre die im Fall 5 angegebene Identität

$$(pqr)\,(pst) + (pqs)\,(ptr) + (pqt)\,(prs) \equiv 0$$

auf P_3 in der Weise angewendet worden, dass r = b und t = a eingesetzt würde, so folgte daraus eine zweite Form für P_3, in welcher nur die a und b vertauscht wären. Nun unterscheiden sich aber P_1 und P_2 auch nur durch Vertauschung von a mit b; werden deshalb in P_2 die b durch die a vermittelst der ersten Form P_3 und in P_1 die b durch die a aus der zweiten Form für P_3 ersetzt, so sind die beiden resultirenden Gleichungen identisch, wodurch klar ist, dass die vier Lösungen der einen auch die andere erfüllen.

Die Transformation ist somit eine vierdeutige.

Wird M eine Hauptgrade, d. h. geht M durch c, so kann man wegen der Gleichungen

$$\Sigma M_i b_i = 0 \quad \Sigma M_i c_i = 0$$

in den P_i durchweg M_i für $(bc)_i$ einsetzen; dadurch wird

$$P_1 = (x''ax')\,(\xi'ca)\,(\xi''ab) + (\xi''a\xi')\,(x'ab)\,(x''ca)$$
$$P_2 = (x''bx')\,(\xi'ab)\;M_\xi'' + (\xi''b\xi')\,(x''ab)\;M_x'$$
$$P_3 = (x''cx')\,(\xi''ca)\;M_\xi' + (\xi''c\xi')\,(x'ca)\;M_x''.$$

P_3 ist nur noch linear in a; den Werth für a, der sich aus dieser Gleichung ergiebt, setze man in P_1 ein und bestimme daraus, da die Gleichung dann nur noch linear in b ist, den einen Werth für b; das Punktepaar ab, welches also P_1 und P_3 befriedigt, genügt auch der Gleichung $P_2 = 0$; denn stelle ich wiederum die beiden oft erwähnten Identitäten auf, so muss für $P_1 = 0$ und $P_3 = 0$ entweder $P_2 = 0$ oder gleichzeitig $(x'ca)\,(\xi'ca) = 0$ und $(x''ca)\,(\xi''ca) = 0$ sein.

Da hier niemals zwei der vier Factoren der beiden letzten Gleichungen gleichzeitig verschwinden, und träte dieser Fall auch ein, damit doch nicht $P_1 = 0$ und $P_3 = 0$ ist, so folgt, dass das Wertepaar a b nur $P_1 = 0$ macht, d. h. dass $P_1\ P_2\ P_3$ ein gemeinsames Nullpaar besitzen.

Mit der Bestimmung dieses einen Wertepaares ist gleichzeitig nach vorangegangener Deduction auch die Transformation eindeutig bestimmt.

Genau dasselbe Resultat erhält man natürlich, wenn man M beliebig in der Ebene auffasst, dagegen L zur Hauptgraden B macht.

Treten beide zuletzt erwähnten Special-Fälle gleichzeitig ein, so ist durch diese Daten dann die Transformation nicht mehr bestimmbar. Da nämlich zwischen drei Paaren von Involutionsstrahlen — diese wären B, A; $|cx'|$, $|c\xi'|$; $|cx''|$, $|c\xi''|$ — stets eine Bedingung besteht, so haben die gegebenen Bestimmungsstücke nur ein Gesammtgewicht von sieben abhängigen Punktepaaren. Zur Bestimmung der Transformation muss demnach noch ein Ort für a oder b, oder ein anderes Datum, welches das Gewicht eines abhängigen Punktepaares hat, gegeben sein.

Fallen endlich L und M zusammen (nach C), so ist in den P_i zu setzen C_i für $(ab)_i$; damit wird P_1 in a, P_2 in b quadratisch, P_3 in a und b linear. Setzt man die beiden aus P_1 für a gefundenen Werte in P_3 nach einander ein, so entspricht jedem a ein Wert für b; die beiden Wertepaare a b, die also P_1 und P_3 annulliren, bringen auch P_2 zum Verschwinden, wie man durch eine der obigen analoge Betrachtung leicht erkennt. Die beiden Punktepaare $a_1\ b_1$, $a_2\ b_2$ kommen im Wesentlichen nur auf eins hinaus, da a_1 mit b_2 und b_1 mit a_2 zusammenfällt; dies ergiebt sich leicht aus der schon oben erwähnten Symmetrie der Gleichungen $P_i = 0$ in Bezug auf a und b.

Diese so erhaltene Eindeutigkeit der Transformation ist auch auf folgendem Wege leicht zu erkennen.

Es giebt eine Unendlichkeit von Kegelschnitten, die $\frac{c}{C}$ zu Pol und Polare und $\frac{x'\ x''}{\xi'\ \xi''}$ zu conjugirten Punktepaaren haben; das durch sie eindeutig bestimmte Kegelschnittbüschel ist das verlangte.

9. Gegeben sind L M als Oerter für die Hauptpunkte a b, der dritte Hauptpunkt c, ein Punktepaar $\overset{x'}{\xi'}$ und zwei Graden A′ A″, auf denen die zu a′ a″ conjugirten Punkte α′ α″ liegen sollen.

Die beiden Bedingungen, die erfüllt sein müssen, damit es zwei Kegelschnitte gebe, für die abc Tripeldreieck, $\overset{x'}{\xi'}$ ein conjugirtes Punktepaar und für den einen $\overset{a'}{A'}$, für den anderen $\overset{a''}{A''}$ Pol und Polare seien, sind im Falle 6 aufgestellt und lauten nach Absonderung des Factors (abc):

$$D_1 = 0 \text{ und } D_1' = 0.$$

Gemäss der gegebenen Daten sind in ihnen jedoch nicht wie dort, nur a, sondern a und b variabel, so jedoch, dass jeder der beiden Punkte auf eine Grade beschränkt ist; ersetze ich mit Hilfe der dies besagenden Gleichungen a_3 durch a_1 und a_2, b_3 durch b_1 und b_2, so resultiren zwei Gleichungen, beide variabel in zwei Grössen des binären Gebietes und in jeder derselben vom zweiten Grade.

Wird daraus eine der beiden Unbekannten eliminirt, so tritt die andere in der Schlussgleichung im achten Grade auf; damit ist die Transformation achtdeutig bestimmt.

Im speciellen Falle kann M in die Hauptgrade A übergehen; es ist dann gestattet, durchweg für $(bc)_i$ zu setzen M_i; die neuen Gleichungen lauten dann:

$$(a'ca)\,(a'ab)\,A_a'\,M_{x'}\,M_{\xi'} + (a'ab)\,(x'ca)\,(\xi'ca)\,A_b'\,M_{a'} + (a'ca)\,(x'ab)\,(\xi'ab)\,A_c'\,M_{a'} = 0$$

$$(a''ca)\,(a''ab)\,A_a''\,M_{x''}\,M_{\xi''} + (a''ab)\,(x''ca)\,(\xi''ca)\,A_b''\,M_{a''} + (a''ca)\,(x''ab)\,(\xi''ab)\,A_c''\,M_{a''} = 0.$$

Aus diesen Gleichungen lässt sich, gleichwie im allgemeinen Falle, der Factor (abc) herausnehmen; an der ersten Gleichung soll dies direct gezeigt werden. In der bereits öfters erwähnten Identität setze man:

$$p = a,\quad q = x',\quad r = c,\quad s = a',\quad t = b;$$

damit verwandelt sich das zweite Glied in:

$$(x'aa')\,(abc)\,(\xi'ca)\,M_{a'}\,A_b' + (x'ab)\,(a'ca)\,(\xi'ca)\,M_{a'}\,A_b'$$

und die ganze Gleichung wird:

$$(abc)\,(x'aa')\,(\xi'ca)\,M_{a'}\,A_b' + (a'ca)\,(a'ab)\,A_a'\,M_{x'}\,M_{\xi'}$$
$$+ (x'ab)\,(a'ca)\,M_{a'}\,\{(\xi'ca)\,A_b' + (\xi'ab)\,A_c'\} = 0.$$

Der letzte Klammerfactor ist aber gleich

$$A_{\xi'}\,(abc) - (\xi'bc)\,A_a',$$

folglich schreibt sich die Gleichung wie folgt:

$$(abc)\,\{(x'aa')\,(\xi'ca)\,M_{a'}\,A_b' + (x'ab)\,(a'ca)\,A_{\xi'}\}$$
$$+ (a'ca)\,A_a'\,M_{\xi'}\,\{(a'ab)\,M_{x'} - (x'ab)\,M_{a'}\} = 0;$$

wird für den Augenblick im letzten Term $(bc)_i$ für M_i zurück eingesetzt, so erhält man wegen der Identität

$$(a'ab)\,(x'bc) - (x'ab)\,(a'ab) = (x'ba')\,(abc)$$

als Endgleichung nach Weglassung des Factors (abc) folgende:

$$(x'aa')\,(\xi'ca)\,M_{a'}\,A_b' + (x'ab)\,(a'ca)\,M_{a'}\,A_{\xi'} + (a'ca)\,(x'ba')\,A_a'\,M_{\xi'} = 0.$$

Aehnlich lautet die zweite Gleichung.

Beide sind in a quadratisch, in b linear, folglich ist das Eliminationsresultat in einer der Unbekannten vom vierten Grade, womit zugleich die Vierdeutigkeit der Transformation bestimmt ist.

Gehen L und M gleichzeitig in die Hauptgraden B und A über, so setze man in den beiden letzten Gleichungen L_i für $(ca)_i$ ein; dieselben nehmen dann die Gestalt an:

$$(x'aa')\,L_{\xi'}\,M_{a'}\,A_b' + (x'ab)\,L_{a'}\,M_{a'}\,A_{\xi'}' + L_{a'}\,(x'ba')\,A_a'\,M_{\xi'} = 0$$
$$(x'aa'')\,L_{\xi'}\,M_{a''}\,A_b'' + (x'ab)\,L_{a''}\,M_{a''}\,A_{\xi'}'' + L_{a''}\,(x'ba'')\,A_{a''}\,M_{\xi'} = 0;$$

beide sind in a und b linear; durch Elimination einer der beiden Unbekannten erhält man eine quadratische Gleichung in der anderen, d. h. die Transformation ist eine zweideutige.

Fallen endlich L und M in der Hauptgraden C zusammen, so ergiebt sich auf demselben Wege, indem man in den allgemeinen Gleichungen C_i für $(ab)_i$ einsetzt, eine Eindeutigkeit der Transformation. Dieselbe erkennt man auch sofort auf folgende Weise. Ist K_1 derjenige Kegelschnitt, in Bezug auf welchen $\overset{x'}{\xi'}$ ein conjugirtes Punktepaar und $\overset{c}{C}$ und $\overset{a'}{A'}$ Pole und Polaren sind, ferner K_2 derjenige, bezüglich dessen ebenfalls $\overset{x''}{\xi'}$ ein conjugirtes Punktepaar und $\overset{c}{C}$ und $\overset{a''}{A''}$ Pole und Polaren sind,

so definiren diese beiden Kegelschnitte eindeutig das verlangte Kegelschnittbüschel $(K_1\ K_2)$.

10. Gegeben sind zwei Punktepaare $\begin{matrix} x' & x'' \\ \xi' & \xi'' \end{matrix}$, ein Hauptpunkt c, eine Grade M als Ort für einen zweiten Hauptpunkt b, endlich ein Punkt a′ und eine Grade A′, auf welcher der zu a′ conjugirte Punkt α' liegen soll.

Durch die beiden Strahlenpaare $|cx'|\ |c\xi'|$; $|cx''|\ |c\xi''|$ ist die Involution c eindeutig bestimmt; mit Hilfe derselben findet man zu a′ den conjugirten Punkt α' als Schnittpunkt der Graden A′ mit dem in der Involution zu $|ca'|$ conjugirten Strahle.

Die noch fehlenden Hauptpunkte müssen bekanntlich, ebenso wie c, Mittelpunkte von Involutionen sein, deren Strahlenpaare nach $\begin{matrix} x' & x'' & a' \\ \xi' & \xi'' & \alpha' \end{matrix}$ gehen. Der Ort dieser Mittelpunkte ist eine durch c und die letztgenannten Punkte gehende Curve dritter Ordnung; dieselbe schneidet M in drei Punkten b. Jeder dieser drei Punkte genügt also einmal der Bedingung, auf M zu liegen, und weiter, Mittelpunkt einer ganz bestimmten Involution zu sein; endlich lässt er sich auch als conjugirter Punkt von c in Bezug auf ein mit Hilfe dieses Paares und der drei oben genannten Punktepaare definirtes Kegelschnittbüschel auffassen. Dies sind nun sämmtliche Bedingungen, denen ein Hauptpunkt der Transformation zu genügen hat, folglich ist die quadratisch involutorische Verwandtschaft durch diese Daten dreideutig bestimmt.

Geht M in die Hauptgrade A über, so reducirt sich der Grad der Vieldeutigkeit um eins; denn da c dann selbst auf A liegt, so schneidet die Curve dritter Ordnung die Grade A ausser in c nur noch zwei Male; der Fall, wo b eben nach c fällt, ist aus bereits erwähntem Grunde als für die Bestimmung der Transformation unbrauchbar auszuschliessen. Wird aus M die Hauptgrade C, so ist die Transformation durch die gegebenen Daten überbestimmt; durch Verminderung letzterer um die Grade A′ wird die Aufgabe mit der unter Nr. 8 behandelten identisch.

11. Gegeben ist ein Hauptpunkt c, ferner eine Grade M als Ort für den Hauptpunkt b, weiter ein Punktepaar $\begin{matrix} x' \\ \xi' \end{matrix}$, endlich

drei Punkte a′ a″ a‴ und drei Graden A′ A″ A‴, auf welchen die jenen drei Punkten entsprechenden Punkte α' α'' α''' liegen sollen.

Nimmt man auf M einen beliebigen Punkt b an, so bestimmen unter Weglassung von $\frac{a'}{A'}$ die übrigen Daten eine Zweideutigkeit der Transformation resp. zwei durch c gehende Graden als Oerter für den dritten Hauptpunkt a.[4]) Wird nun b auf M variirt, so beschreiben unter stets gleichen Bedingungen letzt genannte zwei Strahlen ein mit der Punktreihe b projectivisches Strahlsystem.

Auf analoge Weise werden zwei neue Strahlsysteme erhalten, wenn $\frac{a'''}{A'''}$ hinzugenommen, dagegen das eine Mal $\frac{a''}{A''}$, das andere Mal $\frac{a'}{A'}$ fortgelassen wird. Die drei erhaltenen Strahleninvolutionen liegen concentrisch und sind unter einander projectivisch, weil jede zu der Punktreihe b projectivisch ist. Zwei concentrisch liegende projectivische Strahlsysteme haben vier zusammenfallende Strahlen; denn jedes Strahlsystem lässt sich auffassen als dasjenige, welches dem Mittelpunkt c in Bezug auf eine Kegelschnittschaar zugehört; beide Schaaren sind hier projectivisch, und da der Ort ihrer gemeinsamen Tangenten eine Curve vierter Klasse ist, so giebt es von c vier Tangenten an dieselbe.

Drei concentrisch liegende Strahlsysteme haben im Allgemeinen nicht die Eigenschaft, in einem Strahl drei entsprechende zu vereinigen; die vorliegenden jedoch sind in gewisser Abhängigkeit von einander erzeugt und verhalten sich so, als wären ihrer nur zwei, d. h. es kommt viermal vor, dass drei entsprechende Strahlen aus den drei Involutionen zusammenfallen.

Zum Beweise nehme man einen derjenigen vier Strahlen, den die beiden ersten Systeme gemeinsam haben; auf Grund der Herleitung sind damit zwei Kegelschnittbüschel bestimmt; in dem einen (B_1) derselben giebt es einen Kegelschnitt K_1, in Bezug auf welchen a′ der Pol von A′ und einen zweiten K_2, für welchen a″ der Pol von A″ ist; in dem anderen (B_2) findet sich ein Kegelschnitt $\mathfrak{K}_1$, in Bezug auf welchen ebenfalls a′ und

[4]) cfr. Fall 6.

A′ Pol und Polare sind, und einen zweiten $\mathfrak{K}_2$, bezüglich dessen a‴ und A‴ Pol und Polare sind. Da die übrigen Bestimmungsstücke für diese Kegelschnitte dieselben sind, so ist K_1 identisch mit $\mathfrak{K}_1$, beide Büschel haben also zuvörderst diesen einen Kegelschnitt gemeinsam. Ferner der Ort der conjugirten Punkte der Graden $|a'' a'''|$ in Bezug auf B_1 und B_2 sind zwei Kegelschnitte $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$; durch einen Schnittpunkt beider und die Grade $|a'' a'''|$, als Pol und Polare betrachtet, wird mit Zuhilfenahme der beiden Büscheln gemeinschaftlichen Bestimmungsstücke ein neuer Kegelschnitt definirt, welcher gleichzeitig beiden Büscheln angehört; dieselben haben demnach zwei Kegelschnitte gemeinsam, sie sind also identisch. Hieraus folgt, nebenbei bemerkt, dass auch $\varkappa_1 \equiv \varkappa_2$ ist.

Dieses eine Büschel nun enthält sowohl einen Kegelschnitt, in Bezug auf welchen a″ der Pol von A″, als auch einen zweiten, für welchen a‴ der Pol von A‴ ist; diese beiden Kegelschnitte sind aber grade die das dritte Büschel bestimmenden, folglich ist auch dieses mit dem ersten identisch, mithin der den beiden ersten Involutionen gemeinsame Strahl zugleich ein Strahl des dritten Strahlsystems.

Da genau dasselbe, was von diesem einen, allen drei Systemen gemeinschaftlichen Strahle nachgewiesen worden ist, auch von den drei übrigen Strahlen gilt, so ist damit die Transformation als vierdeutig bestimmt zu betrachten.

Geht M durch c, d. h. wird M die Hauptgrade A und rückt b auf ihr dem Punkte c unendlich nahe, so giebt es für diese Lage von b natürlich ebenfalls zwei Strahlen in jeder der drei Involutionen; dieselben sind auch, wie unschwer einzusehen ist, in allen drei Involutionen dieselben; andererseits sind diese zur Bestimmung der Verwandtschaft unbrauchbar, weil sie, verbunden mit den übrigen Daten, ein Gesammtgewicht von mehr als acht abhängigen Punktepaaren besitzen.

Mit Abzug dieser beiden Fälle reducirt sich die im allgemeinen Falle aufgetretene Vierdeutigkeit der Transformation hier auf eine Zweideutigkeit. Fällt endlich M mit C zusammen, so muss, damit die Verwandtschaft nicht überbestimmt sei, das Paar $\begin{smallmatrix} a''' \\ A''' \end{smallmatrix}$ wegfallen; übrigens ist dies dann der schon unter Nr. 9 behandelte specielle Fall.

12. Gegeben sind drei Punktepaare $\begin{matrix} x' & x'' & x''' \\ \xi' & \xi'' & \xi''' \end{matrix}$ und ein Hauptpunkt c.

Das Datum eines Hauptpunktes ist nach Satz 1 der Einleitung aequivalent dem eines unabhängigen Punktepaares; demnach würden die gegebenen Daten das Gesammtgewicht von vier Punktepaaren repräsentiren. Zur Bestimmung der Transformation ist es aber nothwendig, dass die vier Punktepaare unabhängig von einander seien und dies ist hier nicht der Fall.

Wie bekannt nämlich liegen die conjugirten Punktepaare, von den Hauptpunkten aus betrachtet, in Involutionen; ein beliebiger Punkt in der Ebene hat nun nicht die Eigenschaft, dass drei Strahlenpaare von ihm nach den drei conjugirten Punktepaaren Strahlen in Involution sind, vielmehr liegen alle derartigen Punkte von verlangter Eigenschaft auf der Jacobischen Curve des Netzes, welches conjugirt ist der durch die drei Punktepaare definirten dreigliedrigen Gruppe. Entweder also liegt c nicht auf dieser Curve, sondern irgendwo in der Ebene und dann ist die Bestimmung der Transformation überhaupt unmöglich; oder c liegt auf der Curve, hat damit aber nur das Gewicht eines abhängigen Punktepaares, in welchem Falle die gegebenen Daten die Verwandtschaft nicht bestimmen.

Damit letzteres eintrete — unter der Voraussetzung, dass c auf der Jacobischen Curve liege — muss nun ein weiteres achtes Bestimmungsstück gegeben sein; dasselbe kann sein

1) ein zweiter Hauptpunkt auf derselben Curve,
2) ein Ort für einen Hauptpunkt,
3) eine Grade A′ als Ort des zu a′ conjugirten Punktes α'.

Ist das sub 1 genannte Bestimmungsstück noch gegeben, so ist die Aufgabe identisch mit der unter Nr. 5 bereits gelösten.

Tritt der zweite Fall ein, so geht die Aufgabe in die unter Nr. 10 behandelte über. Im dritten Falle endlich bestimme man vermittelst des Strahlsystems c den zu $|ca'|$ conjugirten Strahl; derselbe trifft A′ in dem zu a′ conjugirten Punkte α', und zwar giebt es nur einen solchen Punkt. Die vier Punktepaare bestimmen nun eindeutig ein Kegelschnittbüschel und damit auch die Transformation.

13. Gegeben sind zwei Punktepaare $\begin{matrix} x' & x'' \\ \xi' & \xi'' \end{matrix}$, der Hauptpunkt c, zwei Punkte a′ a″ und als Oerter für ihre respectiven conjugirten Punkte die Graden A′ und A″.

Die beiden auf A′ A″ liegenden, zu a′ und a″ conjugirten Punkte α' und α'' findet man direct aus den beiden Involutionsgleichungen:

$$c\,(x'\xi'x''a') = c\,(\xi'x'\xi''\alpha')$$
$$c\,(x'\xi'x''a'') = c\,(\xi'x'\xi''\alpha'')$$

als Schnittpunkte der eindeutig definirten Graden $|c\alpha'|$ $|c\alpha''|$ mit A′ resp. A″; die Involution selbst ist durch die beiden Strahlenpaare $|cx'|$ $|c\xi'|$; $|cx''$ $|c\xi''|$ genau bestimmt.

Die vier Punktepaare $\begin{matrix} x' & x'' & a' & a'' \\ \xi' & \xi'' & \alpha' & \alpha'' \end{matrix}$ bestimmen das gesuchte Kegelschnittbüschel, dessen einer Tripelpunkt c ist; denn nur die Tripelpunkte besitzen die Eigenschaft, Mittelpunkte derjenigen Involutionen zu sein, deren Strahlenpaare nach den conjugirten Punkten eines Büschels hingehen.

Ein zweiter Weg zur Bestimmung der Eindeutigkeit des Kegelschnittbüschels ist folgender:

Es giebt eine Unendlichkeit von Kegelschnitten, in Bezug auf welche $\begin{matrix} x' & x'' \\ \xi' & \xi'' \end{matrix}$ conjugirte Punktepaare und a′ und A′ Pol und Polare sind; alle diese Kegelschnitte bilden ein Büschel B_1. Die Polaren von c bezüglich aller Kegelschnitte des Büschels B_1 bilden ein Strahlbüschel, dessen Mittelpunkt y der conjugirte Punkt zu c ist.

In gleicher Weise bilden alle diejenigen Kegelschnitte, für welche $\begin{matrix} x' & x'' \\ \xi' & \xi'' \end{matrix}$ conjugirte Punktepaare und a″ der Pol von A″ sind, ein zweites Büschel B_2. Der Mittelpunkt desjenigen Strahlbüschels, dessen Strahlen die Polaren von c in Bezug auf alle Kegelschnitte dieses Büschels B_2 sind, sei x, dann sind x und c ebenfalls conjugirte Punkte. c soll nun Tripelpunkt des gesuchten Kegelschnittbüschels sein, d. h. seine Polaren in Bezug auf zwei — und damit auf alle — Kegelschnitte des Büschels sollen identisch sein. Beide obigen Strahlbüschel x und y haben nur die eine Grade $|xy|$ gemeinsam; als Strahl des Büschels y aufgefasst, ist sie die Polare von c

in Beziehung auf einen Kegelschnitt K_1 des Büschels B_1; als Strahl des zweiten Büschels x ist sie ebenso die Polare von c in Ansehung eines Kegelschnitts K_2 aus dem Büschel B_2. $K_1 + \lambda K_2$ ist daher das gesuchte Kegelschnittbüschel, welches die eindeutige Beziehung der Punkte der Ebene zu einander vermittelt. Der zu a′ conjugirte Punkt α' ist der Schnittpunkt von A′ mit der Polare von a′ in Bezug auf K_2, während $\alpha'' = (A'', P^{a}_{K_1}{}'')$ ist, wobei $P^{a}_{K_1}{}''$ die Polare von a″ in Bezug auf K_1 bedeutet.

14. Gegeben ist der Hauptpunkt c, ein Punktepaar $\begin{matrix} x' \\ \xi' \end{matrix}$ und vier Graden A′ A″ A‴ A^{IV} als Oerter für die zu a′ a″ a‴ a^{IV} conjugirten Punkte α' α'' α''' α^{IV}.

Sei c der Coordinaten Eckpunkt 001 und das Gradenpaar $|cx'\ |c\xi'|$ durch die Gleichung $x_1 x_2 = 0$ dargestellt; seien ferner die Coordinaten der Asymptotenstrahlen $\varkappa_1$ $\varkappa_2$ resp. $\varkappa_1$ $(-\varkappa_2)$, so lassen sich, wenn die nach den conjugirten Punkten $a^i\,\alpha^i$ gehenden Graden Strahlen der Involution c sind, bekanntlich zwei Constanten m n finden, so dass

$$\frac{m\varkappa_1 + n\varkappa_1}{m\varkappa_2 + (-n\varkappa_2)} = -\frac{a_2{}^i}{a_1{}^i} \text{ und } \frac{m\varkappa_1 - n\varkappa_1}{m\varkappa_2 - (-n\varkappa_2)} = -\frac{\alpha_2{}^i}{\alpha_1{}^i}$$

ist; durch Multiplication beider Gleichungen erhält man

$$\frac{a_2{}^i\,\alpha_2{}^i}{a_1{}^i\,\alpha_1{}^i} = \left(\frac{\varkappa_1}{\varkappa_2}\right)^2 = \lambda.$$

Da in der folgenden Betrachtung stets nur das Verhältniss zu berücksichtigen ist, so kann man setzen:

$$\alpha_1{}^i = a_2{}^i$$
$$\alpha_2{}^i = a_1{}^i\,\lambda;$$

die dritte Coordinate folgt aus der Gleichung $\Sigma A^{\varkappa}_{i}\alpha^{\varkappa}_{i} = 0$ in der Form

$$\alpha_3{}^i = A_1{}^i a_2{}^i + A_2{}^i a_1{}^i \lambda.$$

Auf diese Weise lassen sich also die vier Punkte α' α'' α''' α^{IV} durch ihre respectiven conjugirten Punkte und einen Parameter λ darstellen.

Die fünf Punktepaare $\begin{matrix} x' & a' & a'' & a''' & a^{IV} \\ \xi' & \alpha' & \alpha'' & \alpha''' & \alpha^{IV} \end{matrix}$ sollen nun zugleich conjugirte Punktepaare eines Kegelschnittbüschels sein; damit dies der Fall sei, sind zwei Bedingungen zu erfüllen. Eine derselben ist identisch befriedigt durch die Eigenschaft der fünf

Punktepaare, von c aus in Involution zu liegen; die zweite Bedingung lautet unter der Annahme, dass $x' \xi'$ nicht nur auf den Seiten des Coordinatendreiecks liegen, sondern selbst die beiden anderen Eckpunkte sind, folgendermassen:

$$0 = \begin{vmatrix} a_1' \; a_2', & a_1' \; a_2' \; A_2' \lambda + a_1' \; a_2' \; A_1' + a_2' \; a_3', \\ & a_1' \; a_2' \; A_2' \lambda + a_2' \; a_2' \; A_1' + a_1' \; a_3' \lambda, \\ & a_2' \; a_3' \; A_1' + a_1' \; a_3' \; A_2' \lambda \\ a_1'' \; a_2'', & a_1'' \; a_2'' \; A_2'' \lambda + a_1'' \; a_2'' \; A_1'' + a_2'' \; a_3'', \\ & a_1'' \; a_2'' \; A_2'' \lambda + a_2'' \; a_2'' \; A_1'' + a_1'' \; a_3'' \lambda, \\ & a_2'' \; a_3'' \; A_1'' + a_1'' \; a_3'' \; A_2'' \lambda \\ a_1''' \; a_2''', & a_1''' \; a_2''' \; A_2''' \lambda + a_1''' \; a_2''' \; A_1''' + a_2''' \; a_3''', \\ & a_1''' \; a_2''' \; A_2''' \lambda + a_2''' \; a_2''' \; A_1''' + a_1''' \; a_3''' \lambda, \\ & a_2''' \; a_3''' \; A_1''' + a_1''' \; a_3''' \; A_2''' \lambda \\ a_1^{IV} \; a_2^{IV}, & a_1^{IV} \; a_2^{IV} \; A_2^{IV} \lambda + a_1^{IV} \; a_2^{IV} \; A_1^{IV} + a_2^{IV} \; a_3^{IV}, \\ & a_1^{IV} \; a_2^{IV} \; A_2^{IV} \lambda + a_2^{IV} \; a_2^{IV} \; A_1^{IV} + a_1^{IV} \; a_3^{IV} \lambda, \\ & a_2^{IV} \; a_3^{IV} \; A_1^{IV} + a_1^{IV} \; a_3^{IV} \; A_2^{IV} \lambda \end{vmatrix}.$$

Da diese Determinante in λ vom dritten Grade ist, so giebt es drei Hauptstrahlenpaare und damit drei Involutionen von c aus, welche die Eigenschaft besitzen, dass ihre Strahlenpaare durch Punktepaare gehen, welche gleichzeitig conjugirt sind in Bezug auf ein Kegelschnittbüschel, dessen einer Tripelpunkt dann c sein muss. Damit ist allen Anforderungen genügt und die Transformation, wie oben erwähnt, dreideutig bestimmt.

15. Gegeben sind sechs Punkte $a' \ldots a^{VI}$ und als Oerter für ihre zugehörigen Punkte die sechs Graden $A' \ldots A^{VI}$, ferner der Hauptpunkt c.

Zur Bestimmung der quadratisch involutorischen Verwandtschaft mittelst dieser Daten nehme ich an, die Involution mit dem Mittelpunkte c sei gegeben und ihre Asymptotenstrahlen seien $u_1 \; u_2$ resp. $v_1 \; v_2$, vorausgesetzt wieder, dass c die Coordinaten 0 0 1 habe. Bezeichnet man mit $a_1^i \; a_2^i$ oder $\alpha_1^i \; \alpha_2^i$ kurz die Coordinaten der Graden $|ca^i|$ oder $|c\alpha^i|$, so lassen sich, da $u \; v \; |ca^i| \; |c\alpha^i|$ stets vier harmonische Strahlen sind, zwei Parameter finden, so dass

$$\frac{\varkappa \, u_1 + \lambda \, v_1}{\varkappa \, u_2 + \lambda \, v_2} = \frac{a_1}{a_2}$$

$$\frac{\varkappa \, u_1 - \lambda \, v_1}{\varkappa \, u_2 - \lambda \, v_2} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}$$

gesetzt werden kann. Um aus beiden Gleichungen $\varkappa$ und λ zu eliminiren, schreibe ich dieselben wie folgt:

$$\varkappa\,(a_1 u_2 - a_2 u_1) + \lambda\,(a_1 v_2 - a_2 v_1) = 0$$
$$\varkappa\,(\alpha_1 u_2 - \alpha_2 u_1) - \lambda\,(\alpha_1 v_2 - \alpha_2 v_1) = 0;$$

folglich ist unter üblicher Abkürzung der Klammerausdrücke:

$$(au)\,(\alpha v) + (av)\,(\alpha u) = 0,$$

oder geordnet nach α:

$$\alpha_1 \{ (au)\, v_1 + (av)\, u_2 \} - \alpha_2 \{ (au)\, v_1 + (av)\, u_1 \} = 0$$

woraus, da es sich wieder nur um das Verhältniss handelt, folgt:

$$\alpha_1 = (au)\, v_1 + (av)\, u_1$$
$$\alpha_2 = (au)\, v_2 + (av)\, u_2$$

und da α auf der Graden $\Sigma A_i a_i$ liegt:

$$\alpha_3 = A_1 \{ (au)\, v_1 + (av)\, u_1 \} + A_2 \{ (au)\, v_2 + (av)\, u_2 \}.$$

Auf diese Weise lassen sich sämmtliche α durch die zugehörigen a vermittelst der beiden Parameter u und v darstellen.

Die Transformation verlangt nun, dass alle sechs Punktepaare conjugirt in Bezug auf ein Kegelschnittbüschel sein sollen. Dies ist der Fall, wenn sowohl die sechsgliedrige Determinante, welche sich aus den sechs Bedingungsgleichungen

$$f(a^i \alpha^i) = 0 \qquad i = 1, 2 \ldots 6$$

zusammensetzen lässt, als auch ihre sämmtlichen Unterdeterminanten verschwinden. Besteht die erstere Bedingung, so ist leicht zu zeigen, dass die übrigen Unterdeterminanten Null sind, wenn zwei von einander unabhängige annullirt sind.

Die Determinante selbst ist identisch Null auf Grund der durch die Involution erzeugten wechselseitigen Beziehungen. Um dies einzusehen, genügt es, wenn ich folgende Elemente der Determinante bilde:

$$a_1\alpha_1 = a_1 v_1\,(au) + a_1 u_1\,(av) = a_1^{\,2} u_2 v_1 + a_1^{\,2} u_1 v_2 - 2a_1 a_2 u_1 v_1$$
$$= a_1^{\,2}\,(u_1 v_2 + u_2 v_1) - 2a_1 a_2 u_1 v_1 \text{ oder kurz}$$
$$= a_1^{\,2}\, u v - 2a_1 a_2\, u_1 v_1.$$
$$a_2 v_2 = a_2 v_2\,(au) + a_2 u_2\,(av) = 2a_1 a_2 u_2 v_2 - a_2^{\,2} u v$$
$$a_1\alpha_2 + a_2\alpha_1 = a_1 v_2\,(au) + a_1 u_2\,(av) + a_2 v_1\,(au) + a_2 u_1\,(av)$$
$$= a_v\,(au) + a_u\,(av)$$
$$= 2a_1^{\,2} u_2 v_2 - 2a_2^{\,2} u_1 v_1.$$

Giebt man diesen hier auftretenden Grössen a die oberen Indices I . . VI, so sind die so gebildeten Terme die Elemente

der ersten, vierten und zweiten Verticalreihen; wird nun die erste mit $2u_2v_2$, die zweite mit u_v, die vierte mit $2u_1v_1$ multiplicirt und die Summe der ersten und vierten von der zweiten subtrahirt, so werden alle Elemente der letzteren Null, folglich ist die ganze Determinante identisch Null.

Zur Bestimmung der beiden willkürlichen Grössen u v bleiben demnach noch zwei Gleichungen, nämlich die beiden erwähnten Unterdeterminanten gleich Null gesetzt; jede derselben ist homogen und vom fünften Grade in u_1u_2; v_1v_2. Wird daraus u eliminirt, so wird die Eliminationsgleichung in v vom fünfzigsten Grade; den fünfzig Werten v entsprechen ebensoviel Werte u; letztere sind aber sämmtlich in den ersteren schon dargestellt, wie man wohl am besten daraus ersieht, dass, wenn man aus den beiden Gleichungen v eliminirt hätte, die Endgleichung in u dieselbe wird. Da es nun für die Festlegung der Transformation vollständig irrelevant ist, welchen Hauptstrahl der Involution ich u und welchen ich v nenne, so reducirt sich damit der Grad der Vieldeutigkeit auf die Hälfte des Grades der obigen Gleichung.

16. Gegeben sind vier Punktepaare $\begin{matrix} x' & x'' & x''' & x^{IV} \\ \xi' & \xi'' & \xi''' & \xi^{IV} \end{matrix}$.

Die vier Punktepaare bestimmen, wie in früheren Fällen schon öfters davon Gebrauch gemacht worden ist, direct ein Kegelschnittbüschel. Die Tripelpunkte desselben, das sind die Fundamentalpunkte der Verwandtschaft, findet man am leichtesten, wenn man die vier Punktepaare als zerfallende Kegelschnitte auffasst. Der durch dieselben definirten viergliedrigen Gruppe steht als conjugirte [5]) eine zweigliedrige d. h. ein Kegelschnittbüschel gegenüber, dessen Tripelpunkte die gesuchten sind.

17. Gegeben sind drei Punktepaare $\begin{matrix} x' & x'' & x''' \\ \xi' & \xi'' & \xi''' \end{matrix}$ und zwei Graden A′ A″, auf welchen die zu a′ a″ conjugirten Punkte α' α'' liegen sollen.

Auch in diesem Falle erkennt man leicht die Eindeutigkeit der Transformation. Ein Kegelschnitt ist bekanntlich genau bestimmt, wenn drei Punktepaare gegeben sind, die in Bezug

[5]) cfr. Rosanes: Math. Annal. Bd. VI, pag. 268.

auf ihn conjugirte sein sollen und wenn eine bestimmte Grade die Polare eines gegebenen Punktes sein soll.

Wird nun einmal derjenige Kegelschnitt K_1, für den a′ A′ Pol und Polare und $\begin{matrix} x' & x'' & x''' \\ \xi' & \xi'' & \xi''' \end{matrix}$ conjugirte Punkte, dann derjenige, für welchen dieselben drei Punktepaare conjugirt und a″ A″ Pol und Polare sind, bestimmt, so geben diese beiden Kegelschnitte Anlass zu dem Büschel $(K_1 K_2)$, welches, weil es allen gewünschten Anforderungen genügt, die gesuchte Transformation und zwar eindeutig vermittelt.

Sei A_2 die Polare von a′ in Bezug auf K_2 und A_1 die von a″ in Bezug auf K_1, so ist

$$\alpha' = (A_1 A_2) \text{ und } \alpha'' = (A_2 A_1).$$

Eine zweite Lösung dieser Aufgabe anzuführen, sehe ich mich um so mehr veranlasst, als die Erledigung der nächsten drei Fälle auf gleichem Princip beruht.

Wird auf A′ ein beliebiger Punkt α' als zu a′ conjugirt angenommen, so bestimmen die nun vorliegenden vier Punktepaare $\begin{matrix} x' & x'' & x''' & a' \\ \xi' & \xi'' & \xi''' & \alpha' \end{matrix}$ ein Kegelschnittbüschel. Dem Punkte a″ ist durch dieses Büschel ein bestimmter Punkt α'' zugeordnet als Schnitt der Polaren von a″ in Bezug auf alle Kegelschnitte des Büschels; seine Coordinaten findet man aus den Gleichungen, welche man durch Nullsetzen aller fünfgliedrigen Determinanten folgender Matrix erhält:

$$\begin{vmatrix} x_1'\xi_1', & x_1'\xi_2' + x_2'\xi_1', & x_1'\xi_3' + x_3'\xi_1', & x_2'\xi_2', & x_2'\xi_3' + x_3'\xi_2', & x_3'\xi_3' \\ x_1''\xi_1'', & x_1''\xi_2'' + x_2''\xi_1'', & x_1''\xi_3'' + x_3''\xi_1'', & x_2''\xi_2'', & x_2''\xi_3'' + x_3''\xi_2'', & x_3''\xi_3'' \\ x_1'''\xi_1''', & x_1'''\xi_2''' + x_2'''\xi_1''', & x_1'''\xi_3''' + x_3'''\xi_1''', & x_2'''\xi_2''', & x_2'''\xi_3''' + x_3'''\xi_2''', & x_3'''\xi_3''' \\ a_1'\alpha_1', & a_1'\alpha_2' + a_2'\alpha_1', & a_1'\alpha_3' + a_3'\alpha_1', & a_2'\alpha_2', & a_2'\alpha_3' + a_3'\alpha_2', & a_3'\alpha_3' \\ a_1''\alpha_1'', & a_1''\alpha_2'' + a_2''\alpha_1'', & a_1''\alpha_3'' + a_3''\alpha_1'', & a_2''\alpha_2'', & a_2''\alpha_3'' + a_3''\alpha_2'', & a_3''\alpha_3'' \end{vmatrix}$$

Die sechs Gleichungen, die daraus zu bilden möglich sind, sind nicht unabhängig von einander, vielmehr lassen sich vier von ihnen durch die übrigen zwei, die jedoch selbst von einander unabhängig sein müssen, linear zusammensetzen. Die zwei zu erfüllenden Gleichungen nun sind homogen und linear sowohl in α' als in α''. Eliminirt man mit Zuhilfenahme der Gleichungen

$$\Sigma \alpha_i' A_i' = 0 \quad \Sigma \alpha_i'' A_i'' = 0$$

die Grössen $\alpha_3'\ \alpha_1''\ \alpha_2''\ \alpha_3''$, so bleibt eine in $\alpha_1'\ \alpha_2'$ quadratische Gleichung übrig; diese sagt aus, dass es auf Λ' zwei Punkte von verlangter Eigenschaft giebt, womit die Transformation zweideutig bestimmt wäre.

Dieses Resultat entspricht nicht dem auf dem ersten Wege gefundenen; es lässt sich daher von vornherein annehmen, dass hier im zweiten Falle eine Reduction des Grades eintreten wird.

Um dieselbe zu finden, nehme man aus obiger Matrix diejenigen beiden fünfgliedrigen Determinanten, welche durch Weglassung der ersten resp. sechsten Verticalreihe entstehen und nenne dieselben Δ_1 bezüglich Δ_6.

$\Delta_1 = 0$ und $\Delta_6 = 0$ sind zwei in α'' lineare Gleichungen von der Form

$$F_1\alpha_1'' + F_2\alpha_2'' + F_3\alpha_3'' = 0$$
$$\Phi_1\alpha_1'' + \Phi_2\alpha_2'' + \Phi_3\alpha_3'' = 0$$

zu welchen noch als dritte Gleichung

$$A_1''\alpha_1'' + A_2''\alpha_2'' + A_3''\alpha_3'' = 0$$

tritt. Die F_i und Φ_i sind lineare Functionen der Grössen α_i'.

Da diese drei Gleichungen gleichzeitig bestehen sollen, so muss die Determinante

$$D = \begin{vmatrix} F_1 & F_2 & F_3 \\ \Phi_1 & \Phi_2 & \Phi_3 \\ A_1'' & A_2'' & A_3'' \end{vmatrix} = 0 \text{ sein.}$$

Dies ist die oben erwähnte in $\alpha_1'\alpha_2'$ — wenn α_3' durch die Gleichung $\Sigma\,\alpha' A' = 0$ eliminirt ist — homogene und quadratische Gleichung, welche unbedingt zwei Werte, die im Allgemeinen auch nicht gleich sein werden, liefert; es fragt sich nur, ob beide Wurzeln im vorliegenden Falle zu verwerten sind.

Wenn einer der beiden resultirenden Werte so beschaffen ist, dass er die Grössen F_i proportional den Φ_i macht, so ist derselbe zur Bestimmung der Transformation unbrauchbar; denn wenn $F_1 : F_2 : F_3 = \Phi_1 : \Phi_2 : \Phi_3$, so ist wohl $D = 0$, aber auch gleichzeitig

$$\Delta_1 = \lambda'\Delta_6.$$

Die beiden Gleichungen $\Delta_1 = 0$ und $\Delta_6 = 0$ stellen damit wesentlich ein und dieselbe Gleichung dar, sie leisten mithin, der an sie gestellten Anforderung, zwei von einander unabhängige Gleichungen zu sein, nicht mehr Genüge.

Die Reduction der Zweideutigkeit auf eine Eindeutigkeit bei vorgelegter Aufgabe hängt also allein von der Frage ab: Ist eine der beiden Wurzeln α' von $D = 0$ so beschaffen, dass für dieselbe die F_i proportinal den Φ_i werden?

Diese Frage ist zu bejahen.

Δ_1 und Δ_6 sind zwei fünfgliedrige Determinanten, welche die zweite, dritte, vierte und fünfte Verticalreihe der Matrix gemeinsam haben; Δ_1 enthält als letzte Verticale die auch in der Matrix zuletzt stehende, während Δ_6 die im Rechteck zuerst stehende Verticale ebenfalls zu ihrer ersten hat. Werden mit δ_i ($i = 1, 2 \ldots 5$) die viergliedrigen Unterdeterminanten der nicht gemeinsamen Reihen bezeichnet, wobei δ_i grade diejenige vorstellt, in der die ite Horizontale fehlt, so lassen sich die beiden in Frage kommenden Gleichungen folgendermassen schreiben:

$$\Delta_1 = x_3'\xi_3'\,\delta_1 + x_3''\xi_3''\,\delta_2 + x_3'''\xi_3'''\,\delta_3 + a_3'\alpha_3'\,\delta_4 + a_3''\alpha_3''\delta_5 = 0.$$
$$\Delta_6 = x_1'\xi_1'\,\delta_1 + x_1''\xi_1''\,\delta_2 + x_1'''\xi_1'''\,\delta_3 + a_1'\alpha_1'\,\delta_4 + a_1''\alpha_1''\delta_5 = 0.$$

Die Grössen $\delta_1\,\delta_2\,\delta_3\,\delta_4$ sind linear in α''; δ_5 dagegen in Bezug auf diese Grösse constant, dagegen ist δ_5 wie die übrigen — ausser δ_4 — in α' linear. Bestimmt man aus der Gleichung

$$\delta_5 = 0$$

den einen Wert für α' und setzt diesen in die Ausdrücke $\delta_1\,\delta_2\,\delta_3$ ein, so werden diese Grössen zu einander und zu δ_4 proportional, d. h. es ist

$$\delta_2 = \mu\delta_1, \quad \delta_3 = \nu\delta_1, \quad \delta_4 = \rho\delta_1.$$

Für diese eine Wurzel α' wird somit

$$\Delta_1 = \delta_1\varkappa_1$$
$$\Delta_6 = \delta_1\varkappa_2$$
$$\text{folglich } \Delta_1 = \lambda\Delta_6.$$

Abgesehen von diesem, für die Bestimmung der Transformation unbrauchbaren Werte liefert die Gleichung $D = 0$ nur noch eine Wurzel α' und damit ist die angedeutete Eindeutigkeit nachgewiesen.

Bemerkt sei noch, dass, wie aus der Herleitung sich ergiebt, D in die Factoren δ_5 und D′ zerlegt werden kann, wenn man mit D′ = 0 diejenige Gleichung bezeichnet, welche die letzterwähnte Wurzel liefert.

18. Gegeben sind zwei Punktepaare $\begin{matrix} x' & x'' \\ \xi' & \xi'' \end{matrix}$ und vier Graden A′ A″ A‴ A^{IV} als Oerter für die zu a′ . . . a^{IV} conjugirten Punkte α' . . α^{IV}.

Zur Fixirung der Transformation nehme man auf zwei der Graden A′, A″ je einen Punkt α' resp. α'' an und betrachte dieselben als zu a′ bezüglich a″ conjugirte Punkte; die vier Punktepaare $\begin{matrix} x' & x'' & a' & a'' \\ \xi' & \xi'' & \alpha' & \alpha'' \end{matrix}$ bestimmen dann wiederum ein Kegelschnittbüschel. In Bezug auf dieses soll der zu a‴ conjugirte Punkt auf A‴, der zu a^{IV} conjugirte auf A^{IV} liegen; daraus ergeben sich zwei, der Gleichung D = 0 im vorigen Falle analog gebildete Determinanten

$$D_1 = 0 \qquad D_2 = 0.$$

Wie dort die beiden Determinanten $\Delta_1 = 0$, $\Delta_6 = 0$ einen gemeinsamen Teil δ_5, linear in α', hatten, welcher eine der beiden auftretenden Lösungen unbrauchbar machte, so tritt hier ein Gleiches ein. Schreibt man nämlich die hier nothwendigen Bedingungsgleichungen $\Delta_1' \Delta_6' \Delta_1'' \Delta_6''$ wie oben, jede geordnet nach der nicht gemeinsamen Verticalreihe hin, so zeigt sich, dass die mit δ_5' resp. δ_5'' bezeichneten Grössen identisch sind. Demnach kann man setzen:

$$D_1 = \varkappa_1 \delta_5' D_1' \text{ und } D_2 = \varkappa_2 \delta_5' D_2'$$

wobei $\varkappa_1$ $\varkappa_2$ von α' und α'' unabhängige Grössen, dagegen $\delta_5' D_1' D_2'$ je linear in α' und α'' sind. Da nun, wie oben gezeigt worden ist, $\delta_5' = 0$ für die Transformation unbrauchbare Werte insofern liefert, als damit die beiden unabhängig sein sollenden Determinanten $\Delta_1^i \Delta_6^i$ einander proportional werden, so bleiben zur Bestimmung der Verwandtschaft diejenigen Werte nur noch übrig, welche sich aus den Gleichungen

$$D_1' = 0 \qquad D_2' = 0$$

ergeben.

Selbst die Schnittpunkte von D_1' und δ_5' oder von D_2' und δ_5' — wobei ich $D_1' D_2' \delta_5'$ mir als Curven denke — sind aus-

zuschliessen; der erstere z. B. macht zwar $D_1 = 0$ und $D_2 = 0$, letztere Gleichung wird, da dieser Schnittpunkt im Allgemeinen doch nicht auf $D_2' = 0$ liegt, jedoch nur insofern erfüllt, als $\delta_5' = 0$ ist, der Fall, der grade auszuschliessen ist.

Die Gleichungen $D_1' = 0$, $D_2' = 0$ sind, wie bereits erwähnt, linear und homogen in α' und α''; die Elimination einer dieser beiden Grössen macht die Endgleichung quadratisch in der anderen und bestimmt somit die Transformation zweideutig.

19. Gegeben sind sechs Graden $A' \ldots A^{VI}$ als Oerter für die zu $a' \ldots a^{VI}$ conjugirten Punkte $\alpha' \ldots \alpha^{VI}$ und ein Punktepaar $\begin{matrix} x' \\ \xi' \end{matrix}$.

Der Weg, der uns die Lösung der beiden vorhergehenden Aufgaben hat finden lassen, führt auch in diesem Falle zu einem Resultat. Auf A' wird ein Punkt α' auf A'' ein Punkt α'' und endlich auf A''' ein Punkt α''' vorläufig beliebig angenommen und die drei Punktepaare $\begin{matrix} a' & a'' & a''' \\ \alpha' & \alpha'' & \alpha''' \end{matrix}$ werden als im Sinne der Transformation entsprechende betrachtet; durch dieselben und durch $\begin{matrix} x' \\ \xi' \end{matrix}$ ist im weiteren ein Kegelschnittbüschel bestimmt.

Dasselbe muss nun so beschaffen sein, dass in ihm drei Kegelschnitte vorkommen, in Bezug auf welche der Reihe nach $a^{IV}\ A^{IV}$, $a^{V}\ A^{V}$, $a^{VI}\ A^{VI}$ Pol und Polare sind, oder mit anderen Worten: die zu $a^{IV}\ a^{V}\ a^{VI}$ in Bezug auf das Büschel conjugirten Punkte müssen beziehlich auf $A^{IV}\ A^{V}\ A^{VI}$ liegen. Diese drei Bedingungen sind, weil der conjugirte Punkt als Schnitt zweier Polaren gefunden werden kann, quadratisch sowohl in α' als in α'' und α'''. Die drei quadratisch homogenen Gleichungen reduciren sich aber auf dieselbe Weise, wie vordem, durch Absonderung eines Factors, welcher allen gemeinsam ist, auf folgende drei lineare und homogene Gleichungen:

$$a_{11}\,\alpha_1'\alpha_1'' + a_{12}\,\alpha_1'\alpha_2'' + a_{21}\,\alpha_2'\alpha_1'' + a_{22}\,\alpha_2'\alpha_2'' = 0$$
$$b_{11}\,\alpha_1'\alpha_1'' + b_{12}\,\alpha_1'\alpha_2'' + b_{21}\,\alpha_2'\alpha_1'' + b_{22}\,\alpha_2'\alpha_2'' = 0$$
$$c_{11}\,\alpha_1'\alpha_1'' + c_{12}\,\alpha_1'\alpha_2'' + c_{21}\,\alpha_2'\alpha_1'' + c_{22}\,\alpha_2'\alpha_2'' = 0.$$

Hierin stellen die $a_{ix}\ b_{ix}\ c_{ix}$ lineare Functionen der Grössen α_i''' und der Coefficienten dar. Betrachtet man zunächst hier-

bei als Unbekannte die Producte $\alpha_1'\alpha_1''$, $\alpha_1'\alpha_2''$, $\alpha_2'\alpha_1''$, $\alpha_2'\alpha_2''$, so lassen sich die drei Gleichungen in Bezug auf diese auflösen; die Werte für dieselben sind in den α''' vom dritten Grade. Die vier Producte sind nun aber nicht unabhängig von einander, denn das Product des ersten und vierten ist gleich dem Producte aus dem zweiten und dritten; werden in diese Bedingungsgleichung die für $\alpha_i'\alpha_\varkappa''$ gefundenen Werte eingesetzt, so wird dieselbe in der einen Unbekannten α''' vom sechsten Grade; die Transformation ist also sechsdeutig.

20. Gegeben sind acht Punkte $a' \ldots a^{VIII}$ und acht Graden $A' \ldots A^{VIII}$, auf welchen die jenen Punkten entsprechenden Punkte $\alpha' \ldots \alpha^{VIII}$ liegen sollen.

Auf den Graden A' A'' A''' A^{IV} werden respective die Punkte $\alpha'\ \alpha''\ \alpha'''\ \alpha^{IV}$ beliebig angenommen und dieselben als auf Grund der Transformation zu $a'\ a''\ a'''\ a^{IV}$ conjugirte Punkte betrachtet. Das durch die vier Punktepaare $\begin{matrix} a' & a'' & a''' & a^{IV} \\ \alpha' & \alpha'' & \alpha''' & \alpha^{IV} \end{matrix}$ definirte Kegelschnittbüschel muss nun die Eigenschaft haben, dass die in Bezug auf dasselbe zu $a^V\ a^{VI}\ a^{VII}\ a^{VIII}$ conjugirten Punkte der Reihe nach auf $A^V\ A^{VI}\ A^{VII}\ A^{VIII}$ liegen. Die auf analogem Wege, wie in den letzten Fällen gefundenen vier Bedingungsgleichungen zerlegen sich auch hier je in zwei Factoren, von denen der eine allen gemeinsam und aus oben erwähnten Gründen bei der Bestimmung der Transformation nicht in Betracht zu ziehen ist; die vier zu erfüllenden Gleichungen haben mit Fortlassung dieses Factors die Form:

$$\alpha_1'''\alpha_1^{IV}\,\Sigma a_{i\varkappa_1 1}\alpha_i'\alpha_\varkappa'' + \alpha_1'''\alpha_2^{IV}\,\Sigma a_{i\varkappa_1 2}\alpha_i'\alpha_\varkappa'' + \alpha_2'''\alpha_1^{IV}\,\Sigma a_{i\varkappa_2 1}\alpha_i'\alpha_\varkappa'' + \alpha_2'''\alpha_2^{IV}\,\Sigma a_{i\varkappa_2 2}\alpha_i'\alpha_\varkappa'' = 0.$$

$$\alpha_1'''\alpha_1^{IV}\,\Sigma b_{i\varkappa_1 1}\alpha_i'\alpha_\varkappa'' + \alpha_1'''\alpha_2^{IV}\,\Sigma b_{i\varkappa_1 2}\alpha_i'\alpha_\varkappa'' + \alpha_2'''\alpha_1^{IV}\,\Sigma b_{i\varkappa_2 1}\alpha_i'\alpha_\varkappa'' + \alpha_2'''\alpha_2^{IV}\,\Sigma b_{i\varkappa_2 2}\alpha_i'\alpha_\varkappa'' = 0.$$

$$\alpha_1'''\alpha_1^{IV}\,\Sigma c_{i\varkappa_1 1}\alpha_i'\alpha_\varkappa'' + \alpha_1'''\alpha_2^{IV}\,\Sigma c_{i\varkappa_1 2}\alpha_i'\alpha_\varkappa'' + \alpha_2'''\alpha_1^{IV}\,\Sigma c_{i\varkappa_2 1}\alpha_i'\alpha_\varkappa'' + \alpha_2'''\alpha_2^{IV}\,\Sigma c_{i\varkappa_2 2}\alpha_i'\alpha_\varkappa'' = 0.$$

$$\alpha_1'''\alpha_1^{IV}\,\Sigma d_{i\varkappa_1 1}\alpha_i'\alpha_\varkappa'' + \alpha_1'''\alpha_2^{IV}\,\Sigma d_{i\varkappa_1 2}\alpha_i'\alpha_\varkappa'' + \alpha_2'''\alpha_1^{IV}\,\Sigma d_{i\varkappa_2 1}\alpha_i'\alpha_\varkappa'' + \alpha_2'''\alpha_2^{IV}\,\Sigma d_{i\varkappa_2 2}\alpha_i'\alpha_\varkappa'' = 0.$$

Damit diese vier Gleichungen in Bezug auf die in Evidenz gesetzten Grössen $\alpha'''\ \alpha^{IV}$ eine gemeinsame Lösung haben, muss die Determinante ∇, die sich aus den Coefficienten bilden

lässt, verschwinden; dieselbe ist in α' und α'' je vom vierten Grade. Ist diese Bedingung erfüllt, so liefert jede Lösung, welche irgend drei der Gleichungen genügt, auch ein Nullpaar für die letzte. Aus den letzten drei Gleichungen ergiebt sich nun, wie im vorigen Falle gezeigt worden ist, eine Relation $F = 0$, welche sowohl in α' als in α'' vom sechsten Grade ist.

$\nabla = 0$ und $F = 0$ können, nachdem α' für $\frac{\alpha_1'}{\alpha_2'}$, und α'' für $\frac{\alpha_1''}{\alpha_2''}$ gesetzt worden ist, als Gleichungen zweier Curven vom achten resp. zwölften Grade aufgefasst werden; dieselben haben, da sie von specieller Form sind,[6]) achtundvierzig Schnittpunkte, womit eigentlich die Transformation eben so vieldeutig bestimmt wäre; doch erniedrigt sich der Grad um die Hälfte, wie folgende Betrachtung lehrt:

Werden die Unterdeterminanten der ersten Horizontalreihe von ∇ mit A_i ($i = 1, 2, 3, 4$), die der zweiten mit B_i u. s. w. bezeichnet, so schreibt sich die Gleichung $F = 0$ auch wie folgt:

$$A_1 A_4 - A_2 A_3 = 0;$$

eben so gut hätte ich dieselbe in den B, C oder D darstellen können. Die erste Gleichung $\nabla = 0$ ferner ist identisch mit den Beziehungen:

$$A_1 : A_2 : A_3 : A_4 = B_1 : B_2 : B_3 : B_4 = C_1 : C_2 : C_3 : C_4 = D_1 : D_2 : D_3 : D_4.$$

Diejenigen Wertepaare $\alpha' \alpha''$ nun, welche gleichzeitig

$$\nabla = 0 \text{ und } F = 0$$

befriedigen, genügen, wie die letzten Relationen erkennen lassen, auch den Gleichungen

$$B_1 B_4 - B_2 B_3 = 0$$
$$C_1 C_4 - C_2 C_3 = 0$$
$$D_1 D_4 - D_2 D_3 = 0;$$

ausgenommen hiervon sind solche Nullpaare, welche zu gleicher Zeit $A_1 = A_2 = A_3 = A_4 = 0$ machen und ∇ annulliren; denn obwohl auch in diesem Falle F und ∇ zu Null werden, so werden damit doch die übrigen drei Gleichungen noch nicht

---

[6]) cfr. Durège: Curven III. Ordg. Nr. 160.

erfüllt sein, weil das zwischen den Grössen A einerseits und B, C, D andrerseits bestehende Verhältniss dann ein unbestimmtes wird.

Von den achtundvierzig Schnittpunkten sind also diejenigen abzuziehen, welche sämmtlichen Grössen A verschwinden machen.

Um die Anzahl dieser letzteren zu bestimmen, betrachten wir die Curven

$$A_1 = 0 \qquad A_2 = 0.$$

Aus $A_1 = 0$ folgt, dass sich die Glieder der zweiten Verticale linear durch diejenigen der dritten und vierten zusammensetzen lassen; in gleicher Weise können wegen $A_2 = 0$ die Glieder der ersten Verticale linear durch die Terme der dritten und vierten dargestellt werden; folglich lassen sich umgekehrt auch die Glieder der dritten und vierten Verticalreihe linear aus denjenigen der ersten und zweiten zusammensetzen, d. h. mit $A_1 = 0$ $A_2 = 0$ ist auch zugleich

$A_3 = 0$ $A_4 = 0$.

Letztere beiden Curven haben aber mit ersteren nicht sämmtliche achtzehn Schnittpunkte gemeinsam; ordnet man nämlich A_1 nach der zweiten und A_2 nach der ersten Verticalreihe, so treten bei beiden Gleichungen dieselben Unterdeterminanten auf; diejenigen Werte nun, welche diese drei gleichzeitig erfüllen, machen wohl A_1 und A_2 zu Null, nicht aber A_3 und A_4. Solcher Werte giebt es nun sechs; die drei Unterdeterminanten lassen sich nämlich auffassen als Determinanten folgender Matrix:

$$\begin{vmatrix} \Sigma b_{i x_{21}} \alpha_i' \alpha_x'', & \Sigma c_{i x_{21}} \alpha_i' \alpha_x'', & \Sigma d_{i x_{21}} \alpha_i' \alpha_x'' \\ \Sigma b_{i x_{22}} \alpha_i' \alpha_x'', & \Sigma c_{i x_{22}} \alpha_i' \alpha_x'', & \Sigma d_{i x_{22}} \alpha_i' \alpha_x'' \end{vmatrix}.$$

Daraus lassen sich in bereits öfters angeregter Weise die beiden Identitäten

$$\Sigma b_{i x_{21}} \alpha_i' \alpha_x'' P_1 + \Sigma c_{i x_{21}} \alpha_i' \alpha_x'' P_2 + \Sigma d_{i x_{21}} \alpha_i' \alpha_x'' P_3 \equiv 0$$
$$\Sigma b_{i x_{22}} \alpha_i' \alpha_x'' P_1 + \Sigma c_{i x_{22}} \alpha_i \alpha_x'' P_2 + \Sigma d_{i x_{22}} \alpha_i' a_x'' P_3 \equiv 0$$

herstellen, worin P_i eben jene Unterdeterminanten vorstellen.

P_1 und P_2 haben acht Nullpaare gemeinsam; zwei derselben befriedigen die beiden Gleichungen

$$\Sigma d_{i x_{21}} \alpha_i' \alpha_x'' = 0 \quad \Sigma d_{i x_{22}} \alpha_i' \alpha_x'' = 0,$$

die übrigen sechs müssen in Folge der Identitäten auf P_3 liegen.

Mit Abzug dieser haben die vier Curven A_i demnach noch zwölf Schnittpunkte gemeinsam; dieselben sind einfache Punkte für die Curve $\nabla = 0$, dagegen Doppelpunkte für $F = 0$; als Schnittpunkte beider zählen sie demnach für vierundzwanzig. Da dieselben, wie erwähnt, für die Lösung der vorgelegten Aufgabe unbrauchbar sind, so ist die Transformation durch die gegebenen Daten vierundzwanzigdeutig bestimmt.

21. Gegeben ein Hauptpunkt c, zwei Graden L M, auf welchen die Hauptpunkte a und b liegen sollen und 4 Graden $A' A'' A''' A^{IV}$ als Oerter für die zu $a' a'' a''' a^{IV}$ conjugirten Punkte $\alpha' \alpha'' \alpha''' \alpha^{IV}$.

Die Untersuchung, die in diesem Falle anzuwenden ist, gleicht der in Nr. 5 erwähnten; man erhält damit eine Vierzehndeutigkeit der Transformation.

Dieselbe reducirt sich auf eine Sechsdeutigkeit, wenn L in die Hauptgrade B (oder M in A) übergeht; treten beide speciellen Fälle gleichzeitig ein, so ist die Transformation nur noch dreideutig.

Die weiteren, hier nicht behandelten Fälle bleiben einer späteren Untersuchung vorbehalten.

Lebenslauf.

Ich, Paul Schuster, katholischer Confession, geboren am 9. October 1855 zu Waldenburg in Schlesien, bin der Sohn des Königl. Canzleirats Carl Schuster und seiner Ehefrau Alwine geb. Strauch. Nach Absolvirung der Elementarschule meiner Vaterstadt besuchte ich das hiesige Matthias-Gymnasium, welches ich im Jahre 1875 mit dem Zeugniss der Reife verliess.

Michaelis desselben Jahres bezog ich hiesige Universität und hörte während meiner Studienzeit die Vorlesungen der Herren Professoren Cohn, Dilthey, Dorn, Galle, Grube, Krause, Meyer, Römer, Rosanes, Schottky, Schröter, Weber. Fünf Semester war ich Mitglied der von den Herren Professoren Dr. Schröter und Dr. Rosanes geleiteten mathematisch-physikalischen Seminarien und ein Semester arbeitete ich praktisch im physikalischen Institut unter Leitung der Herren Professoren Dr. Meyer und Dr. Dorn; ebenso nahm ich je ein Semester Theil an den Uebungen im zoologischen und mineralogischen Museum.

Allen den genannten Herren Professoren, insbesondere Herrn Prof. Dr. Rosanes, dessen freundlicher Anregung diese Arbeit ihre Entstehung verdankt, spreche ich hiermit meinen herzlichen Dank aus.

Thesen:

1. Perspective Zeichnungen räumlicher Gestalten wirken im Unterricht mehr hemmend als fördernd.
2. Die Einführung einer nach Ablauf der Hälfte des akademischen Studiums stattfindenden — dem tentamen physicum der Mediciner entsprechenden — Prüfung würde für die grosse Mehrzahl der Studirenden der Mathematik von wesentlichem Nutzen sein und darf daher als wünschenswert bezeichnet werden.
3. Die Aufnahme der Stenographie in den Lehrplan der höheren Unterrichts-Anstalten ist anzustreben.